



Diffusion multiple des ondes sismiques et expériences analogiques en ultrasons

Éric Larose

► To cite this version:

Éric Larose. Diffusion multiple des ondes sismiques et expériences analogiques en ultrasons. Sciences de la Terre. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT : . tel-00010020

HAL Id: tel-00010020

<https://theses.hal.science/tel-00010020>

Submitted on 1 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE**

Thèse

soutenue par

Éric LAROSE

le 1^{er} Juillet 2005

en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier

spécialité : **Géophysique**

**Diffusion multiple des ondes sismiques
et expériences analogiques en ultrasons**

Composition du jury :

M. Bart A. VAN TIGGELEN	Dir. de Rech. au LPMMC, Grenoble	Président du jury
M. Jean-Pierre VILOTTE	Dir. de Rech. à l'IPG-Paris	Rapporteur
M. Richard L. WEAVER	Pr. à l'Univ. of Illinois at Urbana-Champaign	Rapporteur
M. Georges POUPINET	Dir. de Rech. au LGIT, Grenoble	Examineur
M. Arnaud DERODE	Pr. à l'Univ. Denis Diderot, LOA, Paris	Directeur de thèse
M. Michel CAMPILLO	Pr. à l'Univ. Joseph Fourier, LGIT, Grenoble	Directeur de thèse

Remerciements :

Un grand merci à Jean-Pierre Vilotte et à Richard Weaver d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, et à Bart van Tiggelen et Georges Poupinet d'avoir activement participé au jury.

Michel Campillo et Arnaud Derode ont accepté de diriger cette thèse. Les très nombreuses interactions scientifiques et humaines que nous avons eu ont été essentielles. Merci à leur sagesse, leur patience, leur disponibilité, leurs immenses compétences scientifiques. Mais surtout, merci à leur curiosité et à leur ouverture d'esprit, sans lesquelles cette thèse était impensable.

L'approche inter-disciplinaire de cette thèse est en très grande partie due au soutien et encouragements de Roger Maynard et Mathias Fink. Merci à leur démarche visionnaire et volontariste. Sans eux, cette thèse comme bien d'autres passées et futures n'aurait jamais été envisagées.

Ces trois années de travail ont été une extraordinaire aventure, un voyage. Voyage et découverte de diverses disciplines scientifiques : imagerie médicale, sismologie, géologie, sismique marine, acoustique sous-marine, planétologie et sismologie lunaire... Voyage géographique aussi : Paris, Nantes, Nice, Copenhague, San Diego, San Francisco, (soit environ 20 000 km de train, et 45 000 km d'avion...). Voyage et aventure humaine grâce aux très nombreuses collaborations et échanges scientifiques : merci à Yosio Nakamura (Houston), Amir Khan (Copenhague) ; merci à Philippe Roux, Karim Sabra et Stephane Conti pour leur court mais sympathique accueil à San Diego. Bravo au dynamisme de toute l'équipe du LOA, en particulier à Dominique Clorennec, Christophe Barrière, Julien De Rosny, Stéphane Catheline, Daniel Royer, Jean-François Aubry, Michaël Tanter, Arnaud Tourin, Claire Prada, Gabriel Montaldo et tous les actifs et créatifs thésards. Merci à Bart van Tiggelen et Sergey Skipetrov du LPMMC. Travailler dans l'équipe "Ondes et Structure" du LGIT a été une expérience extrêmement enrichissante grâce à la disponibilité, aux compétences, et au sourire de ses membres : Helle, Georges, Olivier, Michel. Merci bien sur à Ludovic qui a suivi de près ce travail de thèse. Merci enfin à Nathanael pour les excursions alpines et autres "réunions au sommet". Que ce voyage continue (sous toutes ses formes)...

Merci au soutien technique ou administratif de Robert Guiguet, Lyliane Jenaton, Fabrice Doré, Jean-Paul Masson, Pedro Lopez, Sara, France Blanc, Martine Prot, Arnaude Cariou, Patricia Daenens, Christian Dormes (et même parfois Michel Parise...). Ils ont tous contribué aux résultats présentés dans cette thèse.

Ces trois années de travail ont pu être effectuées dans de bonne condition grâce au soutien financier et moral du GdR ImCODE (Imagerie et communication en milieu désordonné), du programme de recherche DyETI, et grâce à l'ENS et au ministère de la Recherche qui m'ont attribué une Allocation Couplée.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Faire une image échographique	5
1.2	Faire une image sismique	6
1.3	Faire l'image globale de la Terre	8
1.4	Des indices de désordre dans la Terre	12
1.5	Le facteur coda Q	14
1.6	Cadre thématique du manuscrit	15
2	Les ondes en milieu complexe	17
2.1	Equation des ondes en milieu homogène	17
2.1.1	Équation d'onde, types d'ondes sismiques	17
2.1.2	Fonctions de Green en milieu homogène	18
2.2	Physique des ondes en milieu hétérogène	20
2.2.1	Ondes classiques et ondes quantiques : une seule équation	20
2.2.2	Les paramètres de la physique des ondes	21
2.2.3	Les trois régimes d'approximation	26
2.2.4	Mésoscopie des ondes sismiques	29
2.3	Quelle information dans la coda ?	30
2.3.1	Notion de grain d'information	30
2.3.2	Le temps de Thouless	30
3	Diffusion multiple et interférence	33
3.1	Équipartition des ondes sismiques	33
3.2	Engendrer et enregistrer la coda sismique	36
3.2.1	Augmenter le signal	36
3.2.2	Diminuer le bruit	36
3.2.3	Choisir un site diffusant	37
3.3	Weak Localization of Seismic Waves	40
3.4	Extension spatiale du cône	47
3.4.1	Modélisation en milieu diffusant ouvert à 2-D	47
3.4.2	Intensité cohérente, intensité incohérente	49
3.5	Interprétation du paramètre de transport t^*	50
3.5.1	Milieu simplement/multiplement diffusant	50

3.5.2	Jusqu'où faut-il traiter la coda pour l'imagerie standard ?	50
4	Extraction passive de la fonction de Green	53
4.1	Corrélation de champ d'onde en milieu fermé	53
4.1.1	Fonction de Green élastique d'un volume fermé	53
4.1.2	Corrélation d'un couple de réponses impulsionnelles	55
4.1.3	Résolution du temps de Heisenberg	55
4.1.4	Faut-il dériver les corrélations ?	58
4.1.5	Équipartition thermique	59
4.1.6	Le Théorème Fluctuation Dissipation	60
4.2	Corrélation en milieu ouvert homogène	60
4.2.1	Sources en champ lointain	61
4.2.2	Sources en champ proche : théorème de la phase stationnaire	62
4.3	Analogie entre corrélation et Retournement Temporel	64
4.3.1	The cavity equation	65
4.3.2	Simulation of perfect Time Reversal	68
5	Asymétrie des corrélations et diffusion	73
5.1	Asymétrie : interprétation RT	74
5.2	Expérience laser-laser	79
5.2.1	Génération et détection laser d'ondes ultrasonores	80
5.2.2	Mise au point d'un modèle de croûte terrestre	87
5.3	Croûte terrestre analogique	89
5.3.1	Introduction	91
5.3.2	Experimental setup	93
5.3.3	Wave scattering and transport properties	98
5.3.4	Two-point correlation of diffuse fields	101
5.3.5	Conclusion	107
5.3.6	Appendix	109
5.4	Correlation of coda waves in Alaska	110
5.4.1	Introduction	110
5.4.2	Emergence of the Green Function and Multiple Scattering	112
5.4.3	Application to Coda Records	115
5.4.4	Time Symmetry and Isotropy of Diffuse Wave Fields	121
5.4.5	Conclusion	129
6	Imagerie passive	131
6.1	Imagerie d'un milieu stratifié	131
6.1.1	Introduction	132
6.1.2	Physical argument	134
6.1.3	Experiment	135
6.1.4	Conclusion	144
6.2	Passive imaging of localized reflectors and interfaces	146

6.3	Correlation of Lunar Seismic Noise	153
7	Convergence des corrélations	161
7.1	Problématique générale	161
7.2	Observations générales	162
7.3	Modélisation en milieu homogène 2-D acoustique	164
7.3.1	Estimateur de la convergence	165
7.3.2	Notion de zone de cohérence	165
7.3.3	milieu homogène	170
7.3.4	Vérification numérique du modèle	171
7.3.5	Approximation asymptotique du RSB	174
7.3.6	Estimation du RSB pour le bruit sismique	174
7.4	Modélisation en milieu diffuseur (acoustique 2-D)	175
7.4.1	Observation : simulation numérique	175
7.4.2	Début de modélisation	180
8	Conclusion	183

Chapitre 1

L'imagerie acoustique et sismique

Cette introduction a pour objectif de dépeindre le sens de la recherche effectuée pendant cette thèse, et d'en souligner les motivations.

1.1 Faire une image échographique

L'emploi de transducteurs piézoélectriques permet de générer des ondes acoustiques aux fréquences ultrasonores. Les longueurs d'ondes associées sont suffisamment petites (le millimètre) pour fournir une résolution d'image compatible avec les impératifs de diagnostic médical. Ainsi, depuis la fin des années 1970, les appareils d'échographie se sont progressivement imposés dans de nombreux domaines (le diagnostic obstétrique en particulier), remplaçant parfois des techniques plus nocives telles que la radiographie X. Très schématiquement, construire une image par ultrasons se fait en trois étapes :

- une impulsion brève (typiquement une à deux périodes de sinusoïde de fréquence centrale de quelques MHz) est émise par un ou plusieurs points sources. L'émission peut être focalisée afin d'éclairer de façon préférentielle une zone d'intérêt dans le milieu à inspecter.
- chaque fois que l'onde incidente rencontre un diffuseur¹, il y a réflexion d'une partie de l'énergie ultrasonore. Cela se produit notamment aux interfaces des objets à inspecter, mais également en leur sein selon la structure du milieu de propagation (grains, présence de diffuseurs isolés, défauts dans une structure homogène, etc...)
- les échos réfléchis (rétrodiffusés) par le milieu atteignent ensuite la barette échographique. Les céramiques piézoélectriques étant réciproques, les émetteurs sont maintenant utilisés comme récepteurs et recueillent les échos. Il est possible d'appliquer des retards sur chacun des capteurs avant de sommer les signaux décalés², cela permet d'écouter préférentiellement les ultrasons réfléchis par une zone particulière. Nous

¹rupture d'impédance acoustique : variation de la vitesse de propagation de l'onde et/ou de la densité du milieu.

²focalisation en réception

formons ainsi le signal échographique dont on espère qu'il constitue une signature fidèle de la zone inspectée.

L'onde est focalisée en un point du milieu. L'intensité du signal acoustique reflété par ce point est reportée sur un pixel de l'image. L'image échographique est donc une véritable carte de réflectivité du milieu.

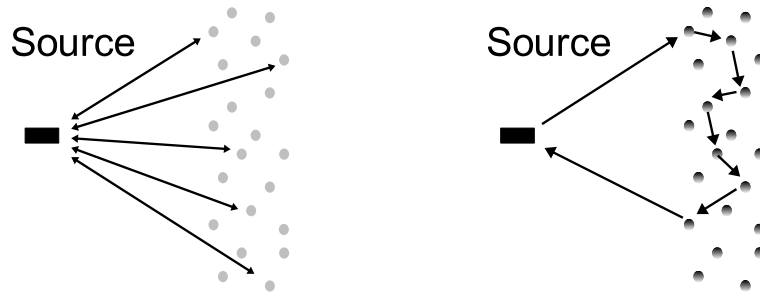


FIG. 1.1 – À gauche : régime de diffusion simple. Il y a équivalence parfaite entre le temps d'arrivée de l'écho et la distance source-diffuseur. À droite : régime de diffusion multiple. Le trajet de l'onde dans le milieu ressemble à celui d'un marcheur dans un labyrinthe. L'équivalence temps-distance n'est plus valable, ce qui rend inapplicables les procédés d'imagerie classique.

Ce procédé d'imagerie repose sur une hypothèse fondamentale : celle de diffusion simple³. Autrement dit nous supposons pour interpréter les échos qu'ils sont issus d'une unique réflexion de l'onde incidente par les hétérogénéités du milieu. Cela est vrai tant que la réflectivité est faible, ce qui est le cas dans de nombreux tissus biologiques.

Lorsque cette hypothèse n'est plus vraie, l'interprétation de l'image devient très délicate, voire impossible car on ne peut plus retrouver la profondeur des structures vues. Par exemple, il a été récemment mis en évidence la présence de diffusion multiple d'ultrasons dans un os trabéculaire poreux [Derode *et al.* (2005)]. Avant d'imaginer un procédé d'imagerie en régime de diffusion multiple, il paraît d'abord essentiel d'attirer l'attention du lecteur sur les indicateurs du régime de propagation des ondes.

Cette notion de diffusion multiple des ultrasons s'applique parfois aux matériaux polycristallins dans le domaine du contrôle non-destructif. Il en va de même des milieux granulaires, où de nombreuses observations confirment la nature diffuse de la propagation des ultrasons [Page *et al.* (1999)].

1.2 Faire une image sismique

À la différence des milieux biologiques dans lesquels les vitesses de propagation sont globalement homogènes (hormis les tissus osseux), le sous-sol peut être constitué de plusieurs milieux géologiques dans lesquels les ondes se propagent à des vitesses sensiblement

³Nous supposons aussi la vitesse du son constante dans le milieu, en général celle de l'eau : $1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$

différentes. L'objectif de l'imagerie sismique n'est alors pas uniquement d'obtenir une carte de réflectivité du milieu (réflectivité générée par des interfaces géologiques) mais aussi une carte des vitesses "moyennes" de propagation des ondes dans chaque couche géologique. De plus, il n'est en général pas possible de focaliser à l'émission des ondes sur un point particulier du sous-sol. En effet l'expérimentateur utilise généralement des sources explosives ou vibrantes qu'il va déplacer le long d'un profil d'acquisition, n'utilisant à chaque fois qu'une seule source pour l'ensemble des récepteurs (il existe des techniques plus perfectionnées bien sûr, mais le principe reste identique).

La première partie du travail d'imagerie consiste à évaluer la célérité des ondes sismiques en fonction de la profondeur. L'opération repose sur l'enregistrement des ondes réfractées, c'est-à-dire l'arrivée du front d'onde direct en un point éloigné de la source. En raison de l'augmentation de la vitesse avec la profondeur, la propagation de l'onde directe est courbée. Schématiquement, plus la distance source-capteur est grande, plus l'onde pénètre profondément et permet la mesure de la vitesse de propagation des couches plus profondes. L'image que l'on obtient alors du milieu est une image dite "basse fréquence" ou "grande longueur d'onde", car elle dépeint les grandes caractéristiques (célérité) du milieu mais ne donne pas le détail de la position des interfaces (vitesses, densité).

La deuxième étape consiste à tenir compte des vitesses de propagation précédemment estimées pour localiser les interfaces du milieu. Cette étape numérique fonde le principe de la migration sismique. Le géophysicien obtient alors une carte de réflectivité du milieu, où les interfaces et les diffuseurs les plus forts ressortent nettement. C'est l'image "haute fréquence" ou "courte longueur d'onde" du milieu. Cette carte permet difficilement de caractériser les différents milieux entre les interfaces.

L'image finale est obtenue en "mélangeant" les informations obtenues par les deux images précédentes. En particulier au travers de codes de calculs itératifs qui font interagir les paramètres de vitesse de propagation et de réflectivité, l'image finale est affinée et optimisée. Elle devient alors exploitable, c'est-à-dire interprétable du point de vue de la géologie. Le traitement des données permet d'éliminer les artéfacts de propagation⁴.

Comme en échographie, l'image sismique est obtenue sous l'hypothèse d'un régime de diffusion simple. Dans certains cas très particuliers, des ondes ayant subi plusieurs réflexions au sein d'une couche particulière peuvent être identifiées (par exemple les *multiples* entre la surface et le fond de la mer, en sismique marine). Il est possible de soustraire ces *multiples* des signaux et d'en limiter l'effet. Cependant, dans la plupart des cas, la probabilité d'obtenir des signaux d'origine diffuse dans le sous-sol est négligée. Pourtant il arrive que, même après des traitements très raffinés, les images sismiques restent *floues* ou très *bruitées*, en particulier pour les temps de parcours les plus longs correspondant aux couches les plus profondes. C'est le cas des zones orogéniques présentes sous les chaînes de montagne

⁴hyperboles de diffraction par exemple...

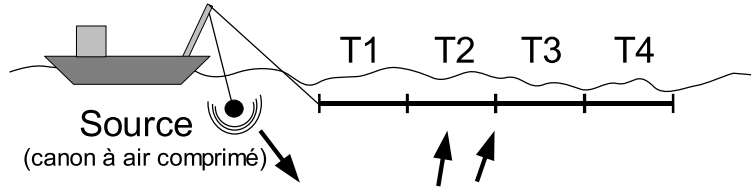


FIG. 1.2 – Schéma succinct d’une expérience de sismique marine. La source (un canon à air) émet une impulsion qui se propage dans la couche d’eau avant de pénétrer le sous-sol. Les ondes réfléchies sont enregistrées sur la flûte au niveau des différentes *traces* (4 ici, beaucoup plus dans la pratique). Une trace sismique est constituée d’un jeu d’hydrophones répartis linéairement le long de la flûte. En échographie ultrasonore, les céramiques piézo-électriques peuvent à la fois servir de source et de récepteurs. Cela n’est pas possible ici, c’est pourquoi l’ensemble du réseau source-récepteur est translaté horizontalement par le bateau.

par exemple. D’autre part, il existe des milieux géologiques où les contrastes d’impédance sont très grands (beaucoup plus élevés qu’en échographie médicale par exemple). Il s’agit aussi bien des zones volcaniques où des roches de densité très différentes coexistent, que des zones de fracturation intense ou un *mélange* très intense des unités géologiques est observé. C’est potentiellement le cas en mer de Marmara, sous la quelle se situe probablement un des réseaux de failles les plus actifs du monde : le réseau nord-Anatolien. Un exemple d’enregistrement de sismique marine (un tir enregistré le long d’une flûte constituée de 360 traces) est présenté Fig. 1.3.

1.3 Faire l’image globale de la Terre

Lorsque nous souhaitons connaître l’aspect des couches les plus profondes de la Terre, des expériences actives comme la sismique réflexion ou réfraction ne sont plus efficaces. Nous changeons en effet d’ordre de grandeur : les distances se comptent en milliers de kilomètres. Par ailleurs le domaine de fréquence des ondes étudiées commence au mHz et dépasse rarement $1 Hz$ (en tout cas $< 10 Hz$). De plus l’énergie nécessaire à une source pour éclairer la Terre entière est gigantesque : elle est délivrée par les séismes de magnitude $M_w > 5$. Pour se donner un ordre de grandeur des énergies mises en jeu, on peut se reporter à la relation qui lie l’énergie d’un séisme en kilo-tonne (kT) de TNT, à sa magnitude de moment :

$$E(kT) = \frac{10^{1.5M_w - 3}}{4}$$

soit 8 000 000 tonnes de TNT pour un séisme ”modéré” de magnitude $M_w = 5$. Seules les bombes nucléaires sont capables de délivrer artificiellement une telle énergie à ces fréquences. L’information pour la sismologie globale est donc essentiellement pourvue par les tremblements de Terre et les réseaux de stations sismologiques qui les enregistrent. Plusieurs décennies d’écoute de la Terre ont permis de mettre en évidence les grandes structures

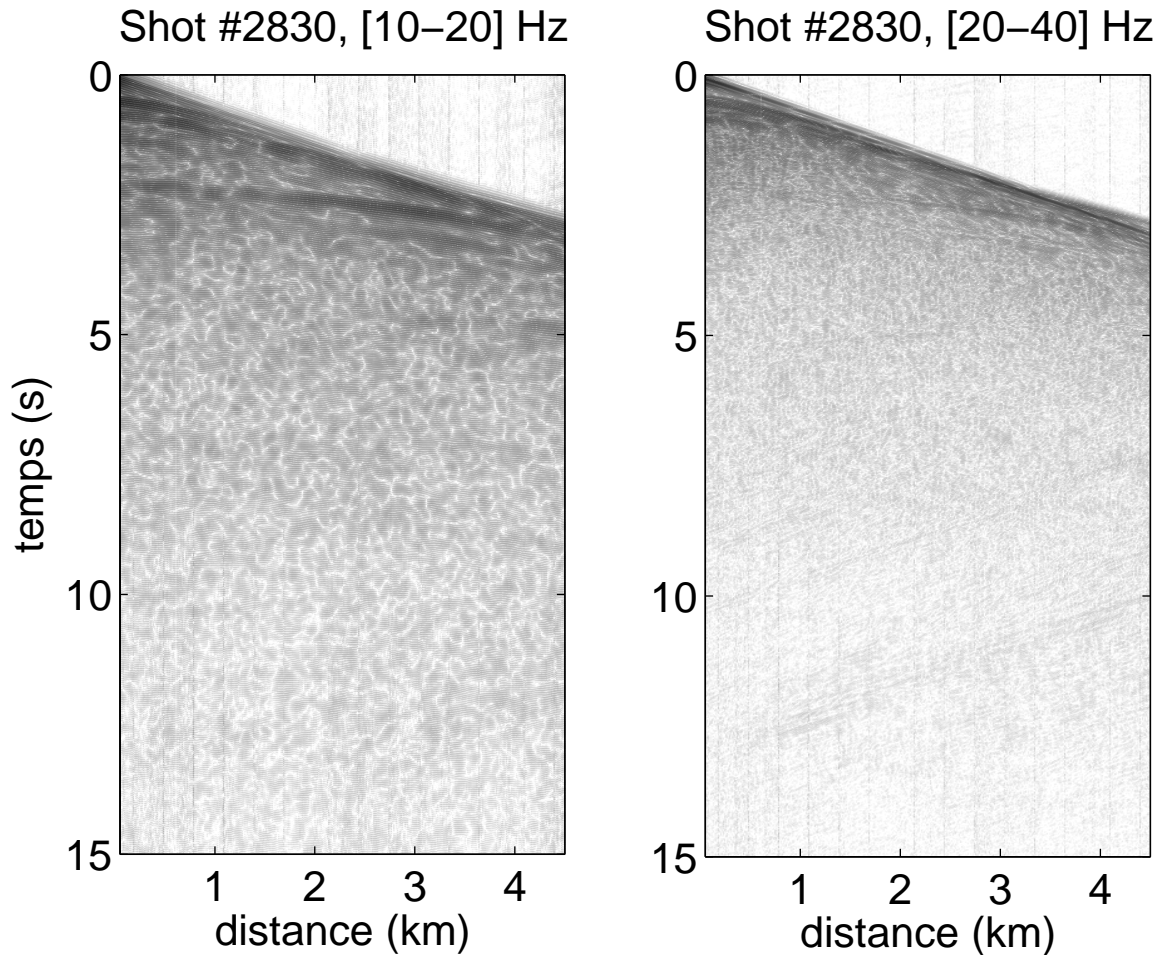


FIG. 1.3 – Intensité sismique (échelle logarithmique) rétrodiffusée par le sous-sol en mer de Marmara, lors de la campagne *Seismarmara* (2001), en fonction du temps (axe vertical) et de la distance de la trace à la source (axe horizontal). La fin du signal sismique (au-delà de 5 s) montre une cohérence spatiale très faible qui rappelle les tavelures optiques (*speckle*). Cela peut être dû à une distribution aléatoire de réflecteurs localisés, en régime de diffusion simple...ou multiple. Cette partie du signal est en général difficile à exploiter, en tout cas elle ne semble pas correspondre à la réponse d'un sous-sol stratifié (les réflexions seraient des hyperboles). À haute fréquence, l'onde sismique est plus fortement atténuée, la durée du signal est raccourcie. Les traits diagonaux au-delà de 10 s sont probablement des échos latéraux sur les navires environnants.

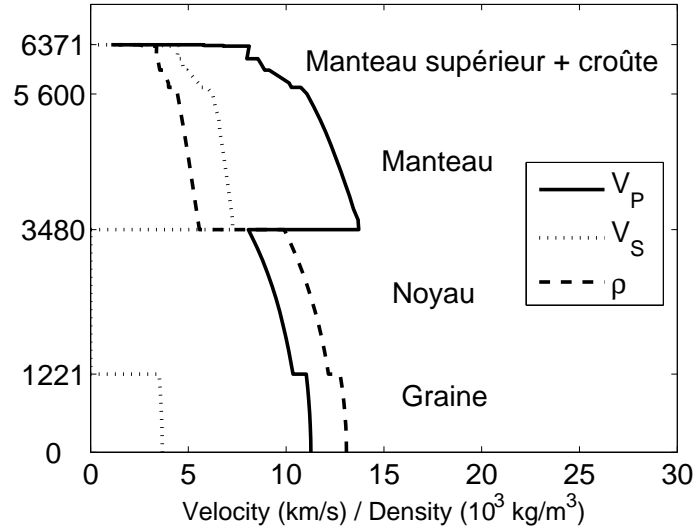


FIG. 1.4 – Modèle de Terre PREM (Preliminary reference Earth model, par [Dziewonski and Anderson \(1981\)](#)), présentant les vitesses de propagation des ondes P (compression) et S (cisaillement) ainsi que la densité en fonction du rayon de la Terre. Ce modèle est un modèle "moyen", à symétrie sphérique. D'autres modèles ont été proposés par la suite, qui sont essentiellement des "raffinements" du premier. Les paramètres élastiques peuvent fluctuer autour de leur valeur moyenne, parfois fortement comme dans la croûte terrestre, engendrant des phénomènes de diffraction complexe et de diffusion des ondes.

(croûte, manteau, noyau, graine) et d'établir un modèle de Terre de vitesse et densité. Ce modèle unidimensionnel est purement radial (symétrie sphérique). Le plus classique est PREM (Preliminary reference Earth model, par [Dziewonski and Anderson \(1981\)](#)), il est présenté figure 1.4.

Pour obtenir les vitesses caractérisant ce modèle, il faut observer la distribution des temps d'arrivée des ondes spéculaires (réfléchies sur des interfaces) autour du globe. Pour un séisme donné, les stations sismologiques sont repérées par leur distance angulaire (de 0° à 180°) depuis la source. Il est possible d'additionner tous les enregistrements pour une même distance angulaire source-capteur (en toute rigueur, il est plus efficace de sommer la quantité STA/LTA⁵). [Astiz et al. \(1996\)](#) ont proposé un *stack* global d'enregistrement sismique. L'image obtenue (pour la composante Z) est présentée figures 1.5, respectivement pour des basses et hautes fréquences.

⁵Short Time Average / Long Time Average, moyenne glissante de l'intensité du signal sismique au court du temps.



FIG. 1.5 – Temps d’arrivée des rais sismiques moyennés sur un grand nombre d’événements [Astiz *et al.* (1996)]. Les signaux sismiques sont filtrés au-dessous de 10 secondes (a) et au-dessus de 6 secondes (b). Les corrections de temps d’arrivée liées aux hétérogénéités connues sont effectuées (en premier lieu la topographie).

1.4 Des indices de désordre dans la Terre

On peut trouver un premier indice du désordre dans la Terre par l’observation géologique en surface : dans les zones montagneuses, ou les zones de fracture intense, l’hypothèse de succession de couches stratifiées horizontalement n’est pas vérifiée. La tomographie sismique [[Aki et al. \(1977\)](#)] a confirmé la présence de structures 3-D pour des couches plus profondes (croûte, manteau supérieur), mettant à mal l’idée d’une Terre à la structure purement radiale. La prise en compte de phénomènes 3-D n’est pas la seule difficulté à laquelle doivent faire face les procédés d’imagerie.

Pour les trois domaines qui précèdent, la diffusion multiple est un vrai cauchemar, un casse-tête. Lorsque l’on passe d’un régime de diffusion simple à un régime de diffusion multiple, les méthodes classiques pour décrire les ondes ne sont plus suffisantes. Le problème *direct* (déterminer le champ d’onde connaissant le milieu) devient fastidieux, et le problème *inverse* (déterminer le milieu connaissant les ondes qui le traversent) absolument impossible à résoudre.

Pour qu’il y ait diffusion multiple, nous pouvons imaginer *au moins* deux conditions :

- La Terre doit être hétérogène sur des distances caractéristiques comparables aux longueurs d’ondes mises en jeu (critère qualitatif).
- Ces hétérogénéités doivent correspondre à des fluctuations importantes des paramètres élastiques (plusieurs %, critère quantitatif).

La présence de diffusion multiple dans les signaux sismiques est très difficile à démontrer quantitativement. Ce sera l’objet du troisième chapitre de la thèse. Cependant plusieurs observations montrent qualitativement la présence d’hétérogénéités dans la Terre (fluctuation 3D des paramètres élastiques).

Prenons par exemple l’enregistrement du champ d’onde acquis lors d’une campagne d’imagerie sismique, figure 1.3. Derrière les hyperboles de réflexion enregistrées au début du signal (au-delà de 5 s), le champ d’onde est très perturbé, constitué d’arrivées diffuses et spatialement incohérentes, ce qui rappelle les tavelures optiques (*speckle*). Cela peut-être dû à une distribution aléatoire de réflecteurs localisés, en régime de diffusion simple...ou multiple, mais en tout état de cause cela ne correspond pas à la réponse d’un milieu stratifié 1-D.

Revenons à l’image globale des temps d’arrivée de [Astiz et al. \(1996\)](#). À distance angulaire donnée, les temps d’arrivée fluctuent (typiquement ± 1 s) en fonction du lieu d’enregistrement. De plus, ces arrivées sont suivies d’un ”bruit” (coda qui n’est pas complètement détruite par la moyenne sur les séismes). Ces deux observations sont des indices de désordre dans la Terre. À haute fréquence, de nombreuses arrivées (*phases* sismiques) ne sont plus visibles. Cela est lié à l’absorption des ondes, plus efficace à haute fréquence qu’à basse fréquence, mais aussi lié à l’atténuation par diffusion des ondes, en particulier lorsqu’elles traversent la croûte terrestre qui est plus hétérogène que le manteau.

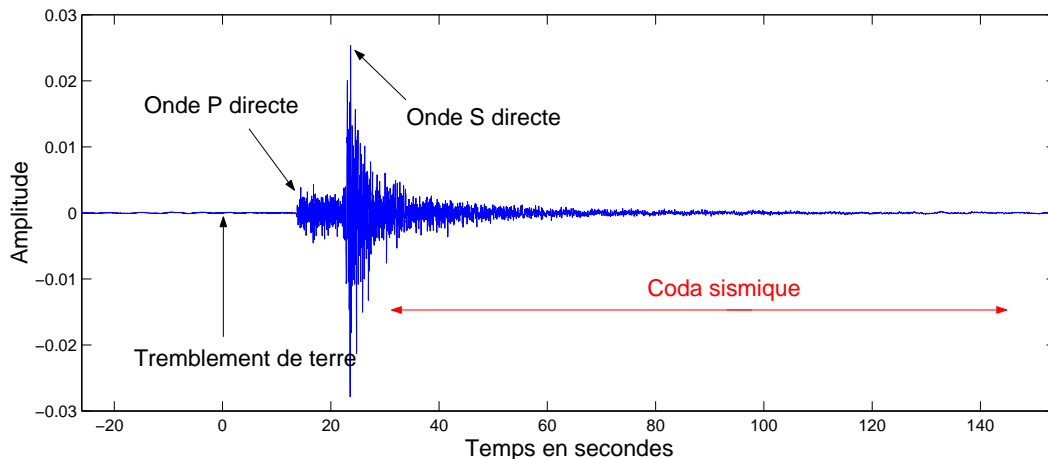


FIG. 1.6 – Exemple d’enregistrement d’un séisme (localisé à 90 km, entre 1 et 10 Hz, composante verticale). Les ondes P arrivent en premier, puis les ondes S plus lentes. La Coda présente une longue décroissance exponentielle.

Prenons enfin un enregistrement de séisme, comme proposé sur la figure 1.6. Le déplacement du sol enregistré au cours du temps constitue le signal sismique. Il est d’abord formé par l’arrivée directe des ondes issues du séisme. Lorsque le milieu est hétérogène (présence de matériaux géologiquement différents), deux effets sont observés. D’une part les ondes directes sont très atténuées, d’autre part l’énergie perdue par les ondes directes “réapparaît” plus loin dans les enregistrements sous forme de vibrations secondaires. Ces vibrations résiduelles qui peuvent durer très longtemps (plusieurs heures) forment la coda sismique⁶ [Aki (1969)].

La coda sismique a une origine qui est longtemps restée inexpliquée, et en général elle n’est pas exploitée même si elle constitue l’essentiel du signal sismique. De nombreux scientifiques ont imaginé qu’elle était constituée d’ondes ayant subies plusieurs réflexions avant d’être enregistrées à la surface, empruntant des trajets aussi compliqués que ceux d’un coureur dans un labyrinthe. Cette hypothèse de diffusion multiple a été confirmée par certaines études de la décroissance moyenne de l’intensité de la coda⁷, et par l’observation de l’équipartition des ondes sismiques [Hennino et al. (2001)]⁸. Cependant la présence de diffusion multiple n’a jamais été démontrée de façon directe.

⁶La notion de *longue* durée de la coda est relative à la période des oscillations, et à la différence de temps d’arrivée P et S.

⁷voir le chapitre 2 et l’équation de transfert radiatif

⁸voir chapitre 3.

1.5 Le facteur coda Q

La coda est appelée ainsi par analogie à la coda musicale qui marque la fin d'un morceau de musique. Elle est formée de vibrations résiduelles du sol après un séisme, *cf* Fig. 1.6. Elle s'étend sur plusieurs minutes après l'arrivée de l'onde directe, alors que l'émission d'une source sismique ne dure que quelques secondes. Ce n'est pas du bruit, car cette coda est reproductible pour un couple source-récepteur donné. Elle contient une grande partie de l'énergie sismique, mais a pourtant longtemps été négligée. Dans leurs travaux pionniers, [Aki and Chouet \(1975\)](#) montrent que la décroissance temporelle de l'énergie de la Coda est une caractéristique locale, indépendante de la magnitude et de la localisation de la source. Ils démontrent que cette enveloppe, entre 1 et 10 Hz, est très bien décrite par l'équation :

$$E_\omega(t) \sim \frac{1}{t^\gamma} \exp\left(-\frac{\omega t}{Q_c(\omega)}\right) \quad (1.1)$$

Le facteur $1/t^\gamma$ est purement géométrique avec γ variant entre 1 et 2, ω est la pulsation. Q_c est appelé facteur de qualité de la coda. C'est un nombre adimensionné qui dépend de la région géographique et de la fréquence.

Depuis 1969, les sismologues ont proposé deux explications [[Aki \(1969\)](#); [Aki and Chouet \(1975\)](#)]. La durée de la coda peut être due à la diffusion simple : les ondes ne sont diffractées qu'une seule fois avant de rejoindre la surface. La décroissance exponentielle de l'énergie est dans ce cas liée à l'absorption. Mais les ondes peuvent être diffractées de nombreuses fois, la diffusion multiple explique aussi très bien cette décroissance. La deuxième hypothèse est aujourd'hui largement privilégiée par la communauté scientifique, sans pourtant être démontrée de façon univoque.

Des travaux numériques [[Ryzhik et al. \(1996\)](#); [Margerin et al. \(1999\)](#)] ont permis de calculer la forme de la coda en utilisant l'Equation de Transfert Radiatif. Cette équation est décrite dans le chapitre 2. Pour des temps assez longs après les premières arrivées, l'approximation de diffusion est bien vérifiée. Dans ce régime, Q_c est donné par :

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{Q_a} + \frac{1}{Q_s} \quad \text{avec} \quad Q_a = \omega\tau_a \quad \text{et} \quad Q_s = \omega H^2/D \quad (1.2)$$

où τ_a est le temps caractéristique d'absorption de l'énergie, D une constante de diffusion (avec un temps caractéristique de diffusion) et H une longueur caractéristique de l'épaisseur de la croûte.

Au Mexique [[Margerin et al. \(1999\)](#)], par exemple, les facteurs de qualité semblent être (autour de 1 Hz) :

$$Q_a \simeq 1100 \quad Q_s \simeq 320$$

Ces valeurs⁹ sont caractéristiques d'une région géologiquement hétérogène.

⁹Il est exceptionnel de pouvoir mesurer séparément Q_s et Q_a . Au Mexique, [Margerin et al. \(1999\)](#) propose ces valeurs par comparaison de résultats expérimentaux et numériques. La plupart du temps, les sismologues ne mesurent que Q_c .

1.6 Cadre thématique du manuscrit

Les techniques d'imagerie à partir d'un champ d'onde sismique ou acoustique sont très comparables dans leur principe comme dans leurs limites. La diffusion multiple, en particulier, qui peut avoir lieu dans les milieux très hétérogènes, est un facteur limitant majeur. Les observations présentées dans les trois sections qui précèdent sont très qualitatives. Elles nous indiquent qu'un modèle de Terre très diffusante et hétérogène est possible. C'est sur ce scénario que nous allons travailler.

Ce manuscrit de thèse se place donc dans la thématique de la propagation des ondes en milieu complexe, et en particulier des ondes sismiques et ultrasonores. Dans ce cadre, trois questions peuvent être posées :

1. Existe-t-il une technique expérimentale permettant de mettre en évidence la présence de diffusion multiple dans la Terre ?
2. Existe-t-il une technique pour quantifier les effets de la diffusion, et caractériser le degré d'hétérogénéité du milieu ?
3. Quelles nouvelles techniques d'imagerie peut-on imaginer dans ce régime de diffusion ?

Les deux premières questions seront abordées dans le troisième chapitre du manuscrit. Une technique d'imagerie passive, reposant sur une hypothèse d'ondes diffuses, est proposée ensuite et longuement étudiée dans les chapitres 4 à 7. Notamment, des expériences ultrasonores sont proposées comme analogues aux phénomènes de propagation d'onde sismique. La suite de l'introduction a pour objectif de présenter quelques notions et outils fondamentaux de la physique des ondes en milieu hétérogène.

Chapitre 2

Les ondes en milieu complexe

Ce chapitre est une introduction à la propagation des ondes en milieu complexe. Les équations essentielles de la mécanique sont rappelées. Les grandeurs qui caractérisent la propagation d'une onde dans un milieu hétérogène sont définies. Ce chapitre doit être vu comme une "boîte à outils" introduisant les chapitres suivants, qui concernent des résultats de recherches plus récents.

2.1 Equation des ondes en milieu homogène

Cette section rappelle les lois mécaniques principales qui permettent de modéliser la propagation d'une onde dans un milieu homogène.

2.1.1 Équation d'onde, types d'ondes sismiques

Soit $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ le vecteur déplacement. Il nous permet de définir le tenseur des déformations ε :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (2.1)$$

Dans l'ensemble du manuscrit, nous adoptons la convention des indices répétés. Nous ferons aussi l'hypothèse de milieu élastique linéaire : la déformation est une fonction linéaire de la contrainte (ce qui est vrai pour les ondes sismiques sur plusieurs ordres de grandeur). D'autre part nous supposons le milieu de propagation isotrope : les caractéristiques mécaniques du milieu n'ont pas d'axe privilégié. Autrement dit, le tenseur des contraintes σ suit la loi de Hooke (voir [Aki and Richards \(2002\)](#) par exemple) :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les paramètres λ et μ sont appelés usuellement les coefficients de Lamé (ils caractérisent la "rigidité" du milieu), et nous noterons ρ la densité

de masse. De façon générale, la loi de Newton s'écrit donc, pour la $i^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{u} :

$$\rho \partial_{tt} u_i = \partial_i (\lambda \partial_k u_k) + \partial_j (\mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)) \quad (2.3)$$

Pour un milieu homogène (λ, μ, ρ constants), l'équation d'onde s'écrit :

$$\partial_{tt} \mathbf{u} - \frac{\lambda + \mu}{\rho} \vec{\nabla} (\text{div } \mathbf{u}) - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

Il est intéressant de définir les vitesses $v_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ et $v_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$, et de réécrire l'équation en séparant les termes divergent et rotationnel :

$$\partial_{tt} \mathbf{u} - v_p^2 \vec{\nabla} (\text{div } \mathbf{u}) + v_s^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

si l'on pose $\mathbf{u} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \wedge \psi = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s$, alors v_p et v_s sont les vitesses des ondes de compression \mathbf{u}_p et de cisaillement \mathbf{u}_s :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v_p^2 \Delta \phi = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta \psi = 0$$

Nous voyons ici apparaître les 2 types d'ondes de référence : les ondes P (purement compressives) et les ondes S (purement de cisaillement) cf Fig. 2.1. Pour ce qui nous intéresse (la Terre), nous constatons souvent : $\lambda = \mu$ donc $v_p/v_s \approx \sqrt{3}$.

La décomposition en ondes P et S est judicieuse pour les milieux infinis, car dans ce cas ces ondes sont les modes propres du système. La Terre ne respecte pas cette condition, car elle possède une surface libre près de laquelle d'autres modes de propagation apparaissent : les ondes de Rayleigh et les ondes de Love. Si les périodes considérées sont inférieures à la période du mode fondamental de la Terre (plusieurs heures) et spatialement loin de la surface, nous pourrions malgré tout parler d'ondes P et S. C'est aussi dans ce régime que l'analogie entre rayons optiques et trajets des ondes sismiques a beaucoup été utilisée¹.

Ces ondes P et S ayant des vitesses de propagation différentes, elles arrivent à des temps différents, cf Fig. 1.6. C'est la différence entre ces vitesses, proportionnelle à la distance du séisme, qui est exploitée pour localiser la source.

2.1.2 Fonctions de Green en milieu homogène

La fonction de Green entre deux points A et B est la réponse du milieu en A à une force impulsionnelle en B . En milieu homogène, et dans le domaine des fréquences, la fonction de Green acoustique est solution de l'équation d'onde :

$$\frac{-\omega^2}{v^2} G_0 - \Delta G_0 = \delta(\mathbf{x})$$

¹théorie "des rais"

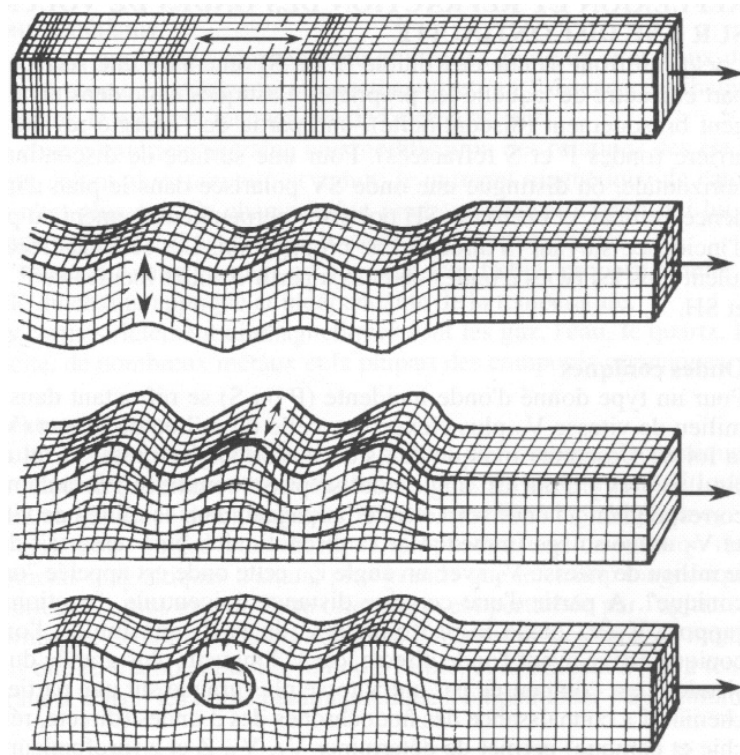


FIG. 2.1 – Schéma de propagation des différents types d'ondes élastiques, extrait de [Caron et al. \(1995\)](#). En haut les ondes de volume : onde de compression, polarisation longitudinale (P) et onde de cisaillement, polarisation transverse (S). En bas les ondes de surface : onde de Rayleigh (R), analogue à une vague sur un fluide (polarisation elliptique), et onde de Love (L).

La forme de la solution varie en fonction de la dimension :

$$G_0(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{4\pi\mathbf{r}} \quad [3D] \quad (2.6)$$

$$G_0(\omega, \mathbf{r}) = \frac{-i}{4} H_0(\mathbf{kr}) \quad [2-D]$$

H_0 étant la fonction de Hankel du premier ordre (et du premier type). En champ lointain, elle tend asymptotiquement vers $-\frac{e^{i\mathbf{kr}+\pi/4}}{2\sqrt{2\pi kr}}$.

Sous forme temporelle...

$$G_0(t, \mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi r} \delta(t - \frac{r}{v}) \quad [3D] \quad (2.7)$$

$$G_0(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t-r/v)}{-2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{v^2}}} \quad [2-D]$$

v est la célérité de l'onde : la vitesse avec laquelle l'impulsion se propage. θ est la fonction de Heaviside. Ces équations correspondent à une onde cylindrique (resp. sphérique) divergente depuis l'origine à 2-D (resp. 3-D). Elles conservent l'énergie sur un cercle (resp. une sphère) centré sur la source.

2.2 Physique des ondes en milieu hétérogène

2.2.1 Ondes classiques et ondes quantiques : une seule équation

Dans un milieu hétérogène, les paramètres élastiques (λ , μ , ρ) fluctuent spatialement. Il est toujours possible de séparer la grandeur moyenne et la fluctuation. Pour une onde acoustique, la célérité s'écrit par exemple $v(\mathbf{r}) = v_0(1 + \xi(\mathbf{r}))$.

$$\Delta G(\mathbf{r}, t) + k_0^2 G(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega^2}{v_0^2} \left(\frac{\xi}{1 + \xi} \right) G(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

avec $k_0 = \frac{\omega}{v_0}$ et $v_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\rho_0}}$. Lorsque les fluctuations sont faibles devant la valeur moyenne (approximation de Born), la partie de gauche décrit la propagation libre d'une onde dans un milieu homogène, la partie de droite décrit le couplage entre l'onde et les diffuseurs. C'est cette dernière qui génère la diffusion des ondes.

Pour les ondes quantiques, la densité de présence de la particule Ψ est solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\partial_t\Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

Il est possible d'obtenir une même équation que pour les ondes classiques, en posant $k_0^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$ et en remplaçant $\frac{\omega^2}{v_0^2} \left(\frac{\xi}{1+\xi} \right)$ par $\frac{2mV(r)}{\hbar^2}$ avec V le potentiel et m la masse de la particule.

2.2.2 Les paramètres de la physique des ondes

Sont présentés ici quelques grandeurs caractéristiques des ondes en milieu complexe.

La section de diffusion

Lorsqu'une onde plane incidente rencontre un diffuseur, c'est-à-dire une zone dans laquelle les paramètres élastiques sont différents de ceux du reste du milieu, son trajet est modifié. Autrement dit, le diffuseur redistribue l'onde incidente en différentes directions, amplitudes et phases. La force d'un diffuseur à modifier la propagation de l'onde se quantifie par sa section efficace de diffusion σ . À 2-D, cette section est une distance, à 3-D une surface. Plus cette quantité est grande, plus le diffuseur est fort. Il existe de nombreuses façons de définir ou de calculer une section de diffusion, l'idée commune étant de comparer l'intensité surfacique diffusée à l'intensité surfacique incidente. Dans ce manuscrit nous nous intéresserons d'abord à la **section de diffusion élastique**.

Section de diffusion élastique et libre parcours moyen élastique

Lorsque le diffuseur (le contraste d'impédance) est localisé dans le milieu, nous pouvons (au moins fictivement) définir l'onde diffusée $\varphi(\omega)$ comme la superposition de l'onde sans diffuseur $\varphi_0(\omega)$ et d'une onde purement émise par le diffuseur $\varphi_s(\omega)$. ω est la pulsation de l'onde. La section de diffusion différentielle $\partial\sigma/\partial\theta$ est l'intensité angulaire de l'onde émise par le diffuseur dans la direction θ (ou l'angle solide Ω à 3-D), l'angle 0° étant usuellement l'angle d'incidence. À 2-D, et pour un champ enregistré à une distance $R \gg \lambda$ du diffuseur, il est possible de séparer le champ diffusé en une contribution radiale et une contribution angulaire. Alors la section différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\omega) = \frac{|\varphi_s^2(\omega, \theta)|}{|\varphi_0^2(\omega, \theta)|} \quad (2.10)$$

et la section de diffusion élastique est :

$$\sigma = \int \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} d\theta \quad (2.11)$$

Le libre parcours moyen élastique, ℓ , est la distance caractéristique de décroissance de l'intensité moyenne (moyenne sur les réalisations du désordre). I étant l'intensité transmise à travers un milieu diffuseur d'épaisseur r , alors $\langle I \rangle = I_0 e^{-\frac{r}{\ell}}$. Les crochets $\langle . \rangle$ dénotent la moyenne d'ensemble², et φ_0 est le champ transmis en l'absence de diffuseurs. Cette relation est plus connue en optique sous l'appellation de loi de Beer-Lambert :

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = I_0 e^{-r[c]A_0} \quad (2.12)$$

où $[c]$ est la concentration de l'espèce chimique "c", et A_0 l'absorption par unité de concentration.

²moyenne d'ensemble = moyenne sur le désordre = moyenne sur la configuration des diffuseurs

Le libre parcours moyen élastique ℓ est donc la distance caractéristique que doit parcourir l'onde pour que l'énergie diffusée soit significative. La densité des diffuseurs étant n , ℓ et σ sont reliés par³ :

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} \quad (2.13)$$

Lorsque les fluctuations du milieu sont continues, il n'est pas possible de localiser un diffuseur isolé. La notion de section de diffusion n'a plus de sens. Cependant il est toujours possible de définir le paramètre ℓ du milieu. Dans ce cas la capacité du milieu à diffuser l'énergie par unité de volume est analogue à la section de diffusion. Pour une onde scalaire par exemple, la vitesse locale de l'onde pourra s'écrire : $v(\mathbf{r}) = (1 + \xi(\mathbf{r}))v_0$. Le milieu est alors défini par la statistique des fluctuations de vitesse $\xi(\mathbf{r})$. Ces fluctuations sont principalement définies par deux grandeurs : leur longueur de corrélation (la distance qu'il faut parcourir pour observer deux fluctuations différentes) et leur intensité. $\Phi(\kappa)$ est le spectre des hétérogénéités du milieu⁴ :

$$\Phi(\kappa) = \int e^{i\kappa(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \langle \xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}') \rangle d(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

À partir de cette grandeur, l'expression du libre parcours moyen élastique ℓ s'écrit :

$$\frac{1}{2\ell} = \frac{\pi^2 k_0^2}{2} \int_0^{2k_0} \Phi(\kappa) \kappa d\kappa = \frac{\pi k_0^4}{4} \int_{4\pi} \Phi(\Omega) d\Omega$$

Ω est un angle solide (une direction dans l'espace 3-D). Plus la longueur de corrélation est courte, plus le libre parcours moyen est court, plus il y a de diffusion. De même, plus l'intensité des fluctuations est grande, plus le libre parcours moyen est court.

Section de diffusion et libre parcours moyen de transport (ou de diffusion)

Il existe une autre longueur caractéristique des événements de diffusion : le libre parcours moyen de transport (ou de diffusion) ℓ^* . C'est la distance caractéristique que doit parcourir l'onde pour perdre la mémoire de sa direction de propagation initiale. Cette longueur caractérise la capacité du diffuseur à modifier la direction de propagation de l'onde. Elle est définie à partir de la section efficace de transport σ^* par⁵ :

$$\sigma^* = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} (1 - \cos(\theta)) d\theta$$

et

$$\ell^* = \frac{1}{n\sigma^*} \quad (2.14)$$

³approximation de milieu dilué

⁴transformée de Fourier spatiale de la fonction de corrélation spatiale des fluctuations

⁵même remarque que ³

La section efficace de transport est donc calculée de la même façon que la section de diffusion élastique, mais nous avons annulé les contributions du diffuseur dans la direction de propagation incidente (0° , *forward scattering*).

Exemple de calcul de section de diffusion

Il est très facile de calculer numériquement la section de diffusion d'une hétérogénéité de n'importe quelle forme et taille. Pour cela, à deux dimensions, il est pratique de placer un réseau circulaire de capteurs dans le champ lointain de l'hétérogénéité. Le calcul comporte deux étapes :

- simulation du champ de référence $\varphi_0(t, \theta)$ reçu en chaque point du cercle (repéré par la direction θ) en l'absence de diffuseur.
- simulation du champ en présence du diffuseur : $\varphi(t, \theta)$.

La différence entre le champ avec diffuseur et le champ sans diffuseur donne *exactement* le champ diffusé $\varphi_s(t, \theta)$. À 2-D, et pour un champ enregistré à une distance $R \gg \lambda$ du diffuseur, la section différentielle de diffusion élastique s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta) = R \frac{\int [\varphi(t, \theta) - \varphi_0(t, \theta)]^2 dt}{\int \varphi_0^2(t, \theta) dt} \quad (2.15)$$

La section différentielle élastique obtenue est alors une moyenne des sections différentielles élastiques dans la bande passante qui entoure la fréquence centrale de la simulation.

À titre d'exemple, le calcul de la section de diffusion différentielle de trois cavités cylindriques de taille différente (rayon a) a été réalisé pour une onde acoustique incidente en eau libre ($v = 1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$). 200 récepteurs ont été placés à quelques longueurs d'onde du diffuseur, l'équation d'onde a été résolue par un code en différences finies, développé par Mickael Tanter au LOA [[Tanter \(1999\)](#)]. La fréquence centrale est $f_0 = 1 \text{ MHz}$ et la bande passante $\frac{\Delta f}{f_0} = 100\%$. La figure 2.2 montre une des deux étapes de la simulation numérique. Ce calcul permet de vérifier qualitativement les comportements asymptotiques suivants :

- lorsque le diffuseur est petit devant la longueur d'onde ($ka \ll 1$) sa section de diffusion est isotrope (cf. fig. 2.3), ce qui implique que la section de diffusion élastique égale la section de diffusion de transport $\sigma = \sigma^*$. En général, quand la taille du diffuseur tend vers 0 ($a \rightarrow 0$) par rapport à la longueur d'onde, l'onde ne "sent" plus le diffuseur, la section de diffusion tend vers 0. Cependant, dans le cas d'un diffuseur creux éclairé par une onde acoustique dans un fluide, la section de diffusion adimensionnée diverge à basse fréquence.
- lorsque le diffuseur est grand devant la longueur d'onde, la section différentielle est très "piquée" vers l'avant (cf. fig. 2.3). La section de diffusion élastique tend vers le double de la section géométrique $\sigma \rightarrow 4a$ et reste très supérieure à la section de diffusion de transport ($\ell^* \gg \ell$).

Dans la suite du manuscrit, ce type de simulation numérique sera à nouveau utilisé, la section de diffusion sera un paramètre important, quantifié par cette méthode.

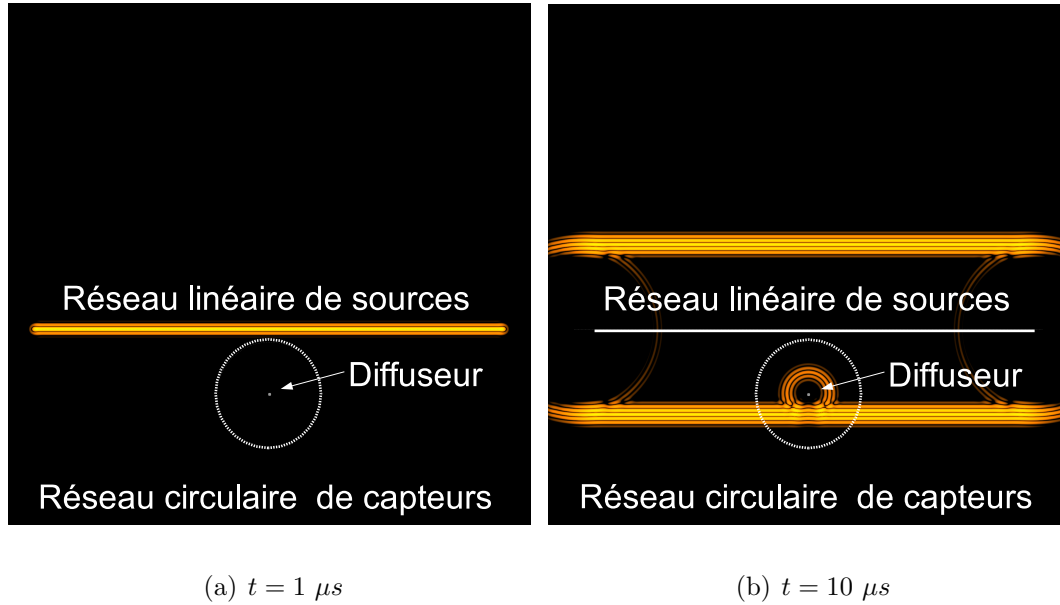


FIG. 2.2 – Photographies instantanées du champ d’onde simulé numériquement. L’onde plane acoustique incidente est générée par un réseau linéaire de sources, puis interagit avec le diffuseur. Une partie de l’onde a été rétrodiffusée. Au devant du diffuseur l’onde incidente a été atténuée, ce qui correspond à l’addition au champ d’onde incident d’une onde diffusée en opposition de phase. L’extension spatiale du réseau de sources est choisie suffisamment grande pour que l’onde cylindrique engendrée de chaque côté du réseau (effet de bord) ne vienne pas polluer l’onde réfléchie par le diffuseur.

λ (mm)	Rayon a (mm)	σ (mm)	σ^* (mm)
1.5	0.025	0.18	0.18
1.5	0.25	1.6	1.1
1.5	2.5	11	7.9

TAB. 2.1 – Paramètre des simulations numériques et calculs de la section de diffusion d’une cavité cylindrique.

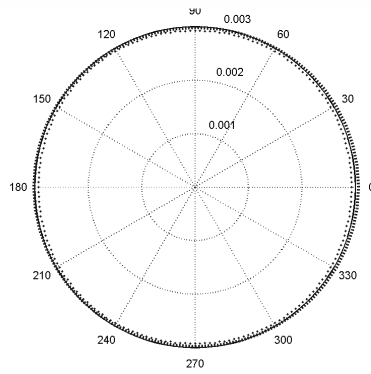
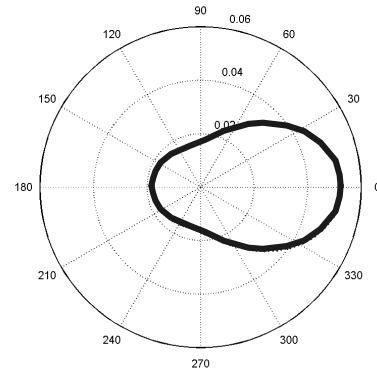
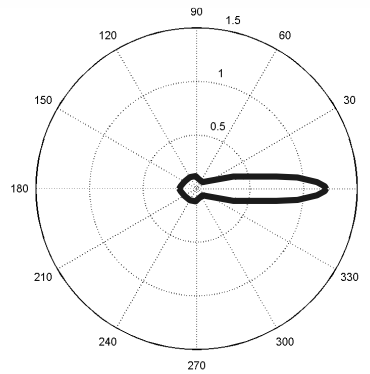
(a) $ka \ll 1$ (b) $ka \approx 1$ (c) $ka \gg 1$

FIG. 2.3 – Section différentielle de diffusion $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}$ pour une cavité cylindrique de rayon (a) $a = 0.025 \text{ mm}$, (b) $a = 0.25 \text{ mm}$ et (c) $a = 2.5 \text{ mm}$, dans l'eau autour de 1 MHz ($\lambda = 1.5 \text{ mm}$). La direction 0° correspond à la direction de propagation de l'onde incidente. À basse fréquence (a) la section différentielle est isotrope, à haute fréquence (c) elle est très "piquée" vers l'avant.

2.2.3 Les trois régimes d'approximation

L'équation d'onde, le champ cohérent, l'onde balistique

La résolution de l'équation d'onde nécessite une connaissance parfaite du milieu, ainsi que celle des conditions aux limites. Elle n'est soumise qu'à une hypothèse de linéarité de l'élasticité, ainsi que d'isotropie des constantes élastiques. Pour un déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ elle s'écrit :

$$\rho(\mathbf{r}) \partial_{tt} u_i = \partial_i(\lambda(\mathbf{r}) \partial_k u_k) + \partial_j(\mu(\mathbf{r})(\partial_i u_j + \partial_j u_i)) \quad (2.16)$$

Dans un milieu fluide, on se ramène à un champ scalaire $\varphi(\mathbf{r}, t)$, l'équation d'onde s'écrit (au premier ordre) :

$$\rho(\mathbf{r}) \partial_{tt} \varphi = \lambda(\mathbf{r}) \Delta \varphi \quad (2.17)$$

L'onde balistique est l'onde qui arrive la première dans les enregistrements. C'est cette onde qui est utilisée pour la tomographie. Le champ cohérent correspond à la partie de l'onde qui "résiste" à la moyenne sur le désordre (sur les réalisations du milieu diffuseur). Ces deux ondes peuvent différer notablement, si le milieu est très hétérogène. Le champ cohérent subit en moyenne une atténuation par les diffuseurs, qui dépend de l'épaisseur L du milieu traversé, et du libre parcours moyen de transport ℓ :

$$\langle \varphi(L, t) \rangle = \varphi_0(L, t) e^{-\frac{L}{2\ell} + i\delta\varphi}$$

φ_0 est le champ obtenu dans le milieu homogène équivalent. $\delta\varphi$ est un déphasage éventuel qui tient compte de la modification de vitesse de propagation du milieu effectif.

Le transfert radiatif

L'équation de transfert radiatif, établie par [Chandrasekhar \(1950\)](#), décrit l'intensité spécifique du champ d'onde $I(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, intensité à la position \mathbf{x} se propageant dans la direction \mathbf{k} . Pour une revue détaillée, nous proposons de se rapporter au travail de revue de [Margerin \(2005\)](#). La propagation de l'énergie est analogue à la propagation groupe de particules lancé dans un réseau de diffuseurs, une telle approche oublie donc la phase de l'onde. Chaque particule, en \mathbf{x} , se propage dans la direction \mathbf{k} et peut y être diffusée dans la direction \mathbf{k}' . Cette équation décrit une intensité moyenne, elle n'a de sens qu'en moyenne sur les plusieurs réalisations d'un milieu diffuseur. Il est possible (mais assez fastidieux) de passer de l'équation d'onde à l'équation de transfert radiatif, au moins sous forme fréquentielle (stationnaire) [[Tourin \(1999\)](#); [Rytov et al. \(1987\)](#)] :

$$\mathbf{k} \cdot \vec{\nabla} I(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = -\frac{I(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{\ell} + \frac{1}{4\pi\ell} \int_{4\pi} I(\mathbf{x}, \mathbf{k}') p(\mathbf{k}', \mathbf{k}) d\mathbf{k}' + e(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \quad (2.18)$$

k est un vecteur unitaire. Cette équation peut être obtenue de façon empirique en invoquant un bilan de flux de particules dans un volume élémentaire. La signification des termes est la suivante :

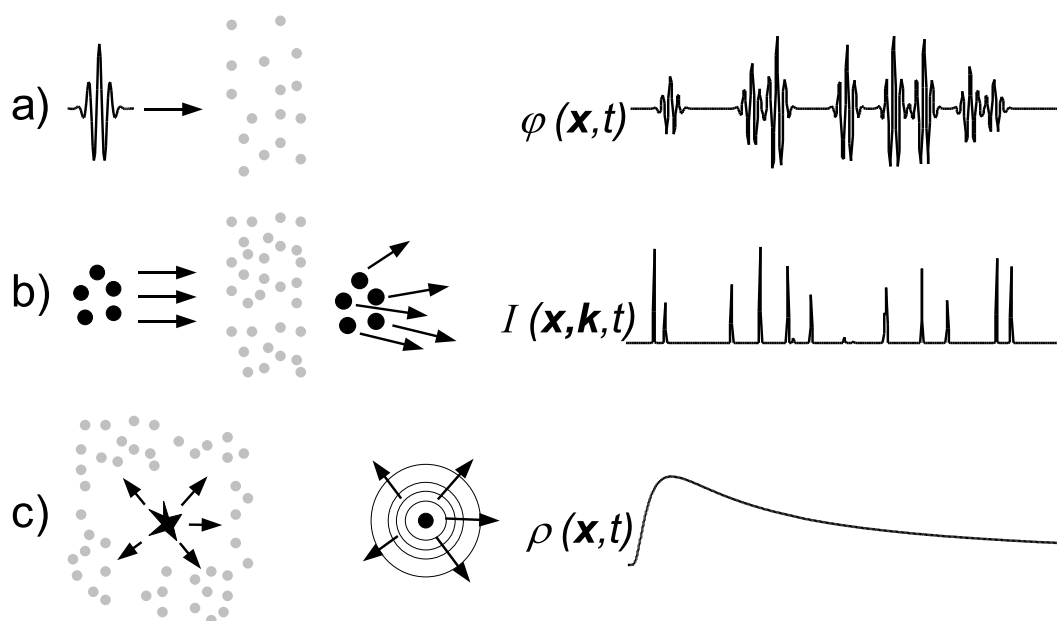


FIG. 2.4 – Trois approches possibles pour décrire la propagation d'une onde scalaire traversant un milieu hétérogène. a) résolution de l'équation d'onde : le champ transmis peut être vu comme une superposition d'ondes multiples réfléchies. b) transfert radiatif : les paquets d'onde sont propagés comme des grains d'énergie, avec une impulsion initiale. c) régime de diffusion : l'énergie diffuse de façon isotrope dès le début du processus.

- Le premier terme de gauche est l'advection des particules : si le membre de droite est nul, alors le paquet de particules se déplace librement.
- $-\frac{I(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{\ell}$ est un terme de perte par diffusion. Il est lié à la probabilité pour que la particule soit déviée par un diffuseur de la direction \mathbf{k} vers n'importe quelle autre direction \mathbf{k}' . Cette probabilité est proportionnelle à l'inverse du libre parcours moyen élastique ℓ .
- $\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{x}, \mathbf{k}') p(\mathbf{k}', \mathbf{k}) d\mathbf{k}'$ est un terme de gain. $p(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ est la densité de probabilité qu'une particule de direction \mathbf{k}' soit diffusée dans la direction \mathbf{k} .
- $e(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ est un terme source lié à la probabilité qu'une particule soit "créée".

Si l'on note $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt}$, alors l'équation de transfert radiatif peut-être ré-écrite à partir d'un bilan de flux de particules dans un volume élémentaire au cours du temps [*Margerin* (1998); *Tourin* (1999); *Lacombe* (2001)]. Pour passer à l'équation de transfert radiatif dynamique (la réponse du milieu à une excitation impulsionnelle), il est nécessaire de rajouter un terme de façon empirique :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \vec{\nabla} I(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = -\frac{I(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)}{\ell} + \frac{1}{4\pi\ell} \int_{4\pi} I(\mathbf{x}, \mathbf{k}', t) p(\mathbf{k}', \mathbf{k}) d\mathbf{k}' + e(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \quad (2.19)$$

L'équation de diffusion

L'équation de diffusion est directement déduite de l'équation de transfert radiatif. Elle porte non plus sur l'intensité spécifique mais sur la densité d'énergie. Celle-ci est la somme sur toutes les directions de toutes les intensités spécifiques :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}$$

Notons aussi \mathbf{J} la densité de courant local d'énergie : $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \int_{4\pi} I(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) \mathbf{k} d\mathbf{k}$.

Nous allons appliquer à l'équation 2.19 deux opérations différentes.

La première est $\int_{4\pi} (.) \mathbf{k} d\mathbf{k}$:

- le premier terme donne $\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{J}$
- le deuxième terme s'écrit $c \vec{\nabla} \rho$
- le troisième terme est directement $-\mathbf{J}/\ell$
- le quatrième s'écrit $\frac{1}{\ell} \int_{4\pi} \mathbf{J} p(\theta) \cos(\theta) d\mathbf{k}$

Le libre parcours moyen de transport ℓ^* apparaît naturellement dans les deux derniers termes :

$$\ell^* = \frac{\ell}{\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\theta) (1 - \cos(\theta)) d\mathbf{k}}$$

En régime quasi-stationnaire, nous pouvons négliger la dérivée temporelle, et nous obtenons la loi de Fick :

$$\mathbf{J} = -\frac{v\ell^*}{3} \vec{\nabla} \rho \quad (2.20)$$

Lorsque le régime de diffusion s'est installé, la direction initiale du groupe de particules est perdue, les directions sont redistribuées de façon aléatoire. Il est raisonnable de supposer que l'intensité spécifique se décompose en un terme moyen et un terme gradient, les termes d'ordres supérieurs (qui caractérisent les ordres supérieurs d'anisotropie de I) étant négligeables :

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \frac{c}{4\pi} \rho(\mathbf{x}, t) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} + \dots$$

En appliquant à l'équation 2.19 l'opérateur $\int_{4\pi}(\cdot) d\mathbf{k}$, nous obtenons :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = \delta(\mathbf{x}) \delta(t)$$

alors nous obtenons pour la densité d'énergie l'équation de diffusion :

$$\partial_t \rho - D \Delta \rho = \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad ; \quad D = \frac{c \ell^*}{3} \quad (2.21)$$

2.2.4 Mésoscopie des ondes sismiques

Il est important de noter qu'à certaines fréquences, les ondes sismiques rentrent dans le domaine de la physique mésoscopique. Les grandeurs mises en jeu sont : la longueur d'absorption l_a , la taille L du système dans lequel elles se propagent, le libre parcours moyen de transport l^* et la longueur d'onde λ . Le libre parcours moyen de transport l^* est la distance que doit parcourir l'onde pour perdre la mémoire de sa direction incidente. **Nous sommes dans un régime dit "mésoscopique"** [Sheng (1995); Trégourès (2001); Akkermans and Montambaux (2004)] quand l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\lambda < l^* \ll L \ll l_a$$

Dans ce régime, la physique est décrite à la fois par l'équation d'onde (régime microscopique, en général $\lambda \sim L$) et par l'équation de Boltzmann (régime macroscopique où on a généralement $l_a \ll L$). De façon concrète, nous traiterons les vibrations sismiques comme des ondes élastiques, et nous appliquerons des résultats de la physique statistique.

Ainsi, de nombreux ponts peuvent être construits entre la sismologie et d'autres domaines de la physique tels que le transport quantique, la propagation d'ondes lumineuses ou acoustiques... La sismologie peut être vue comme un cas particulier du thème plus large de propagation des ondes en milieu complexe.

2.3 Quelle information dans la coda ?

2.3.1 Notion de grain d'information

Très schématiquement, on peut modéliser la réponse impulsionnelle d'un milieu diffuseur comme une succession de répliques de la source, répliques correspondant à une succession de chemins différents et indépendants [Derode *et al.* (2001b, 2000)]. Un grain d'information correspond à une réplique élémentaire de la source de durée t . Le nombre de grains d'information contenus dans la coda de durée T est donc $N = \frac{T}{t}$. Si la largeur spectrale de l'impulsion est δf , sa durée est de l'ordre de $t = 1/\delta f$. Cette notion est illustrée dans la figure 2.5. Ce résultat est vrai tant que la coda est bien constituée d'informations décorréliées. Or, au bout d'un certain temps, cette hypothèse n'est plus vérifiée : c'est le temps de Thouless.

2.3.2 Le temps de Thouless

Dans un milieu ouvert diffusant, une impulsion émise en un point donné connaît une propagation complexe : l'onde directe est atténuée, l'énergie perdue est restituée (ou redistribuée) au cours du temps sous forme d'arrivées plus tardives (diffuses). Le champ enregistré à une distance L de la source peut être vu comme la superposition de ces arrivées diffuses et décorréliées. Le temps de Thouless est le temps nécessaire pour que le champ "s'ergodise", c'est-à-dire le temps après lequel le volume inclus dans la sphère de rayon L autour de la source est rempli de façon homogène par l'énergie diffuse [Derode *et al.* (2000); Akkermans and Montambaux (2004)]. En régime de diffusion, ce temps de Thouless correspond grossièrement au temps d'arrivée du maximum. Cela s'écrit : $\partial_t I(L, \tau_D) = 0$. Si l'intensité suit la loi de diffusion (2-D) il vient :

$$\tau_D = \frac{L^2}{4D}$$

À 3-D, le temps de Thouless est à peu près le même : $\tau_D = \frac{L^2}{6D}$. Très grossièrement, cela veut dire qu'au-delà du temps de Thouless, l'information nouvelle des arrivées diffuses tardives a un poids très faible dans l'enregistrement.

Le nombre de grains d'information est donc

$$N = \tau_D \Delta f \tag{2.22}$$

Prenons l'exemple de l'enregistrement sismique de la figure 1.6. Le signal est filtré entre 1 et 10 Hz. La distance à la source est de 90 km, et le libre parcours moyen élastique au Mexique est de l'ordre de $\ell^* = 40$ km (vitesse moyenne $v = 4$ km/s). Le temps de Thouless est approximativement $\tau_D = 30$ s. Cela veut dire que la durée "utile" de la coda ne dépasse pas 30 s⁶, ce qui correspond à environ 300 grains d'information. En réalité, une infime

⁶Le temps de Thouless augmente comme le carré de la distance source-station L , pour des distances de propagation régionales voire globales, ce temps est donc beaucoup plus long. Il dépasse alors largement la durée effective de la coda dont les enregistrements sont dégradés par un niveau de bruit ambiant important.

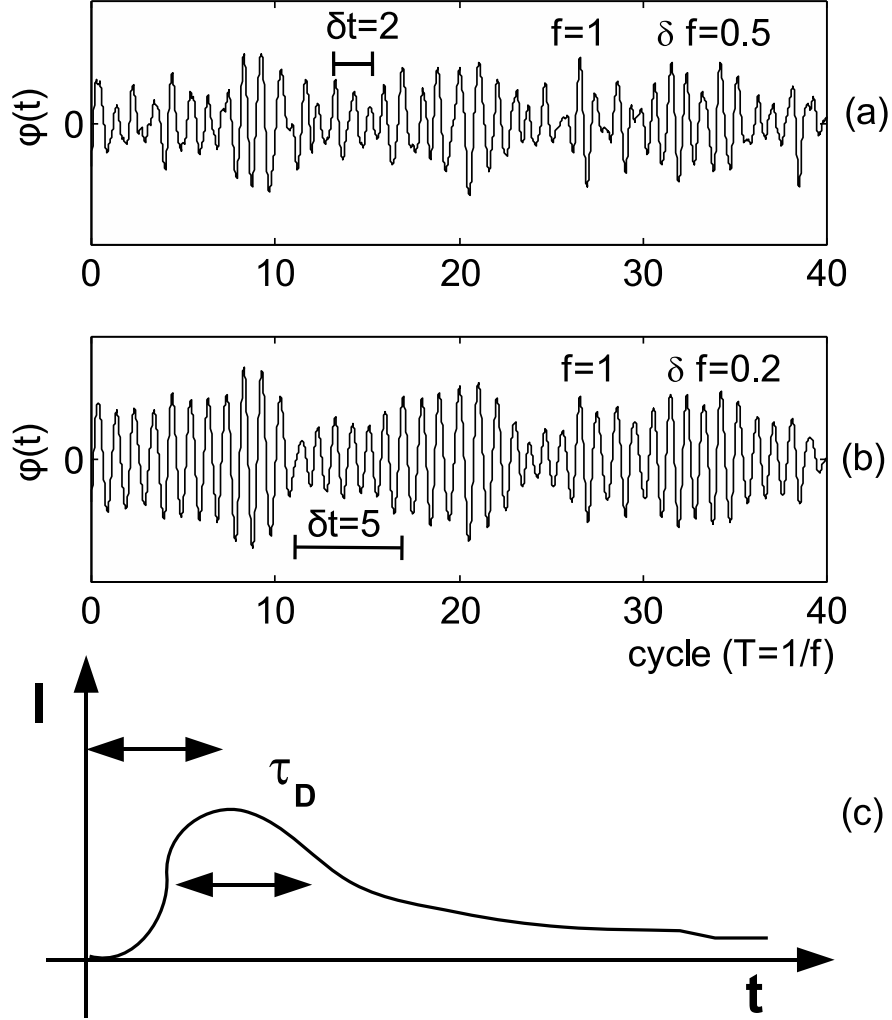


FIG. 2.5 – (a) et (b) : champ $\phi(t)$ pour différentes bandes passantes δf . La taille d'un "grain" d'information correspond à l'inverse de la bande passante. C'est le temps qui sépare deux séries d'oscillations décorréélées (si la durée de la source est petite devant τ_D). (c) : intensité moyenne $I(t) = \langle \phi^2(t) \rangle$ transmise au travers d'un milieu diffuseur, modélisée par l'équation de diffusion. Le temps du maxima est à peu près le temps de la durée de l'ensemble du signal, c'est le temps de Thouless.

partie de cette information est exploitée : les temps d'arrivée et la polarisation des ondes P et S, ceux des arrivées spéculaires, et éventuellement la dispersion de l'onde de Rayleigh. Parce qu'elle est difficile à interpréter, la majeure partie de l'information transportée par la coda est donc perdue, ignorée.

Les chapitres suivants du manuscrit proposent deux façons distinctes de traiter l'information de la coda :

- quantifier le degré d'hétérogénéité du milieu (chap. III),
- faire de l'imagerie passive avec des enregistrements diffus (chap. suivants).

Chapitre 3

Diffusion multiple des ondes sismiques : expérience de localisation faible

Dans ce chapitre nous allons étudier des méthodes expérimentales quantitatives qui permettent de démontrer la présence de diffusion multiple dans la Terre. Le principe d'équipartition [*Shapiro et al. (2000)*; *Hennino et al. (2001)*] est d'abord présenté, ce principe repose sur l'observation de l'énergie des ondes P et S dans la coda. Il est suivi de l'expérience de localisation faible des ondes sismiques (rétrodiffusion cohérente), basée sur une expérience de sismique active. L'expérience porte sur la mesure de la distribution spatiale de l'intensité de la coda.

Cette expérience offre la possibilité de quantifier le degré d'hétérogénéité du milieu géologique sondé¹, ainsi que la transition du régime de diffusion simple vers le régime de diffusion multiple.

3.1 Équipartition des ondes sismiques

L'hypothèse de diffusion multiple a une conséquence importante : à chaque diffracteur, les ondes sont converties. Donc au bout de plusieurs diffusions, un régime stationnaire est atteint dans lequel les conversions se compensent. La diffusion multiple a donc pour effet de "mélanger" les modes de vibrations. Nous prédisons donc que l'énergie initiale d'un séisme se répartit de façon équiprobable dans tous les modes de vibration : c'est le principe de l'équipartition. Ce principe ne s'applique pas lorsque nous sommes dans un régime de diffusion simple. Intéressons-nous à la densité d'état des modes de compression P et de cisaillement S : l'espace des polarisations des ondes planes en milieu infini est à 3 dimensions, une pour les ondes P et 2 pour les S. Dans cet espace des phases, nous pouvons

¹mesure de ℓ^* : le libre parcours moyen de transport

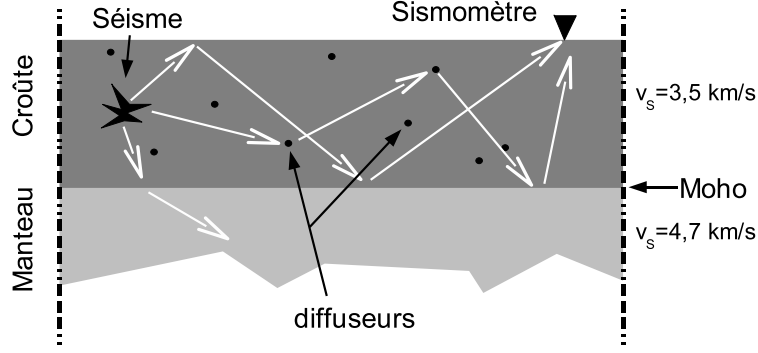


FIG. 3.1 – Modèle proposé pour décrire la propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre. La croûte inhomogène est le siège de diffusion multiple des ondes élastiques. À l'interface entre la croûte et le manteau (le Moho), les ondes sont guidées ou perdues vers le manteau, suivant leur incidence.

calculer la densité d'état P et S autour d'une fréquence donnée :

$$\rho_{p,s} = \frac{\omega^2}{v_{p,s}^3}$$

Le rapport d'équipartition est le rapport de ces deux densités [*Weaver* (1982); *Shapiro et al.* (2000); *Trégourès and van Tiggelen* (2002b)]. Lorsque tous les modes sont excités de la même façon, le rapport entre l'énergie potentielle de cisaillement et l'énergie potentielle de compression est² constant et donné par :

$$\frac{E_s}{E_p} = \frac{2v_p^3}{v_s^3} \approx 10,4 \quad (3.1)$$

Il est important de noter que ce rapport d'équipartition n'est possible QUE si la diffusion est multiple. Lorsque la diffusion est simple, le rapport E_s/E_p dépend du rapport de la source (le séisme). La mesure d'un tel rapport, constant malgré les fluctuations et la décroissance de la coda peut donc être une preuve de diffusion multiple.

Un réseau de capteurs accélérométriques a été placé au Mexique en 1998 afin de mesurer ce rapport d'énergie dans la coda. Pour des capteurs à trois composantes disposés en carré de côté d , et pour des longueurs d'ondes beaucoup plus grandes que la taille du réseau $\lambda \gg d$, il est possible d'évaluer les dérivées partielles du champ par les approximations suivantes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{u_i^3 - u_i^1}{d} \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{u_i^2 - u_i^1}{d} \quad i = x, y, z$$

La condition de traction nulle à la surface libre de la Terre se traduit par les relations

²dans la croûte, $v_p \approx 6 \text{ km}$ et $v_s \approx 3.5 \text{ km}$

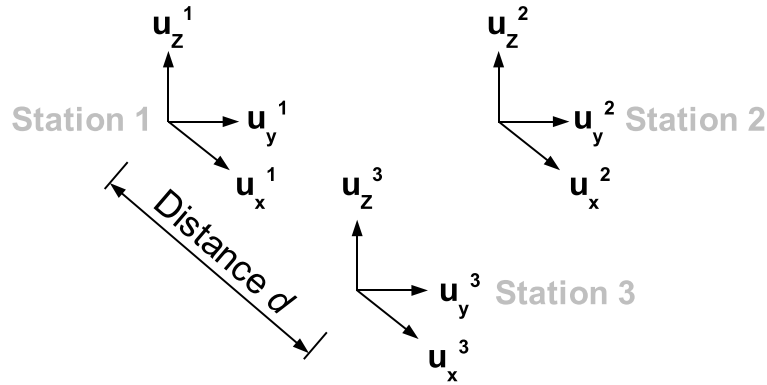


FIG. 3.2 – Dispositif expérimental de mesure de l'intensité des ondes P et S.

suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{v_S^2}{v_P^2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3.2)$$

La répartition des capteurs permet donc de calculer l'énergie S et l'énergie P dans la coda des séismes enregistrés :

$$E_P = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) (\text{div } \mathbf{u})^2 \quad ; \quad E_S = \frac{\mu}{2} (\text{Rot } \mathbf{u})^2$$

La valeur d'équipartition mesurée grâce à ce réseau par [Shapiro et al. \(2000\)](#) est de $7,30 \pm 0.72$, ce qui est en désaccord avec la valeur théorique d'équipartition citée plus haut. Lorsque l'on prend en compte la présence de la surface libre de la Terre, l'espace des phases est modifié. La valeur d'équipartition (le rapport E_s/E_p) est alors différente. La valeur d'équipartition calculée est [[Hennino et al. \(2001\)](#)] :

$$\left(\frac{E_s}{E_p} \right)_{\text{surface libre}} \approx 7,19 \quad (3.3)$$

Le modèle suivant a été proposé [[Margerin \(1998\)](#); [Margerin et al. \(1999\)](#); [Hennino et al. \(2001\)](#); [Trégourès and van Tiggelen \(2002a\)](#)] : la croûte continentale, d'une épaisseur de 30 km à 70 km est une couche fortement hétérogène. Elle est le siège de diffusions multiples. Elle recouvre une couche plus épaisse, le manteau, qui est beaucoup moins diffractante. Le contraste des vitesses à l'interface est suffisamment fort pour que les ondes soient, sous certains angles, guidées dans la croûte. Lorsque les ondes passent dans le manteau, elles sont momentanément perdues : on parle de "fuite" au manteau *cf* Fig. 3.1. Dans ce modèle, il a été supposé que le libre parcours moyen de transport ℓ^* est légèrement supérieur à l'épaisseur de la croûte.

Dans cette configuration, il est possible de calculer tous les modes de vibration de la croûte autour de 1 Hz (avec une croûte homogène). Ensuite les inhomogénéités de volume sont traitées comme des perturbations [*Trégourès and van Tiggelen (2002a)*], ce qui mélange les modes sans les modifier significativement.

Ce modèle théorique est donc en parfait accord avec les observations simologiques, ce qui permet de valider *a posteriori* le modèle de croûte terrestre proposé.

3.2 Engendrer et enregistrer la coda sismique

Mesurer de façon active et contrôlée les propriétés de diffusion et de transport des ondes requiert trois conditions :

1. Il faut être capable de délivrer suffisamment d'énergie dans le sol pour le faire vibrer aux fréquences qui nous intéressent (dans notre cas entre 10 et 100 Hz).
2. Il faut être capable d'enregistrer des ondes de la coda lointaine, dont l'amplitude est au moins 100 fois plus faible que les ondes directes. En général, ce n'est pas la sensibilité des capteurs qui est le facteur limitant, mais plutôt le niveau de bruit sismique ambiant.
3. Le sous-sol doit être suffisamment diffusant et suffisamment peu absorbant pour que l'intensité de la coda soit mesurable.

3.2.1 Augmenter le signal

La technique la plus courante pour disposer d'une grande énergie à la source est l'emploi d'explosif. Cependant l'énergie délivrée dans le sol n'est pas une fonction linéaire de la quantité d'explosif utilisée : une partie de l'énergie des grosses charges est perdue dans la fracturation du sous-sol et dissipée sous forme irréversible. Une source explosive n'est donc pas reproductible. Nous choisissons plutôt la technique de coups de masse reproductibles. L'énergie délivrée dans le sol est alors une fonction linéaire du nombre de coups de masse (qui doit être grand car l'énergie délivrée par chaque impulsion est faible).

3.2.2 Diminuer le bruit

La première technique pour diminuer le bruit est d'enterrer les géophones, ce qui les rend moins sensibles aux ondes acoustiques et améliore le couplage avec le sous-sol. Reste le bruit sismique, qui est essentiellement lié à deux types de sources :

- les sources anthropiques, qui sont liées à l'activité humaine (particulièrement importante en journée).
- les sources météorologiques : les zones dépressionnaires génèrent du bruit sismique sur des distances de plusieurs centaines de kilomètres. Localement, le vent, par le couplage des arbres, génère aussi un fort bruit sismique.

Pour réduire l'effet du bruit anthropique, nous proposons de travailler de nuit et pendant une période anticyclonique.

3.2.3 Choisir un site diffusant

Plusieurs sites ont été testés pendant la campagne de mesure de coda. La source sismique était constituée d'une série de coups de masse (200) enregistrés par un géophone à 15 mètres de la source. Les 200 enregistrements $s(t)$ sont additionnés puis filtrés dans diverses bandes passantes. Le résultat final est l'enveloppe de l'intensité de la coda, en échelle logarithmique (dB)³. La comparaison des codas est présentée figure 3.3 pour la bande de fréquence 60 – 100 Hz. Ces figures permettent d'étudier l'énergie de la source, de quantifier l'importance du niveau de bruit de fond sismique, et de repérer les sites les plus diffusants (coda la plus énergétique).

- *Vercors sud* (courbe bleue) : expérience réalisée par vent faible sur les plateaux sud du Vercors (urgonien).
- *Corrençon en Vercors* (courbe rouge) : expérience réalisé un jour de vent, sur un site à lapiaz (calcaire urgonien érodé). La coda semble un tout petit peu plus énergétique (milieu plus diffusant). On remarque surtout un niveau de bruit (couplage vent/arbre) très fort, qui limite la durée de la coda à 0.5 s.
- *Murier* (courbe noire) : site de remplissage quaternaire (moraine). La coda n'est pas très énergétique (probablement beaucoup d'absorption), et le niveau de bruit est élevé malgré le temps très calme pendant la mesure. Ce niveau de bruit est peut-être lié à l'environnement urbain (Grenoble) du site du Murier.
- *Vercors Sud* (courbe verte) : Vercors sud, un jour de calme absolu (anticyclone sur toute la France). La coda dure environ 1 seconde (c'est le meilleur résultat du jeu de mesures).
- *Mont Rachais* (courbe rose) : 200m au-dessus de Grenoble. La source explosive est très énergétique (beaucoup plus que les 200 coups de masse des autres mesures). Ce site est à proximité immédiate de la ville de Grenoble. Le bruit anthropique urbain augmente encore le niveau de bruit déjà élevé lié au vent très fort du jour de cette expérience.

La figure 3.4 compare les codas enregistrées en deux sites distincts : un site à calcaire urgonien (Vercors Sud) et un site à dépôts volcaniques (Puy des Gouilles). L'intensité en échelle logarithmique (dB) est mesurée à différentes distances. Nous observons que :

- La vitesse des ondes est beaucoup plus faible sur le site volcanique (scories).
- L'amplitude de l'onde directe y est beaucoup plus faible.
- La coda y est plus énergétique et dure plus longtemps (1.5 s entre 60 et 100 Hz, contre 1 s dans le Vercors).

Tous ces facteurs jouent en faveur d'une hypothèse de milieu volcanique plus diffusant que le calcaire du Vercors.

³ $dB = 10\log_{10}(s^2)$

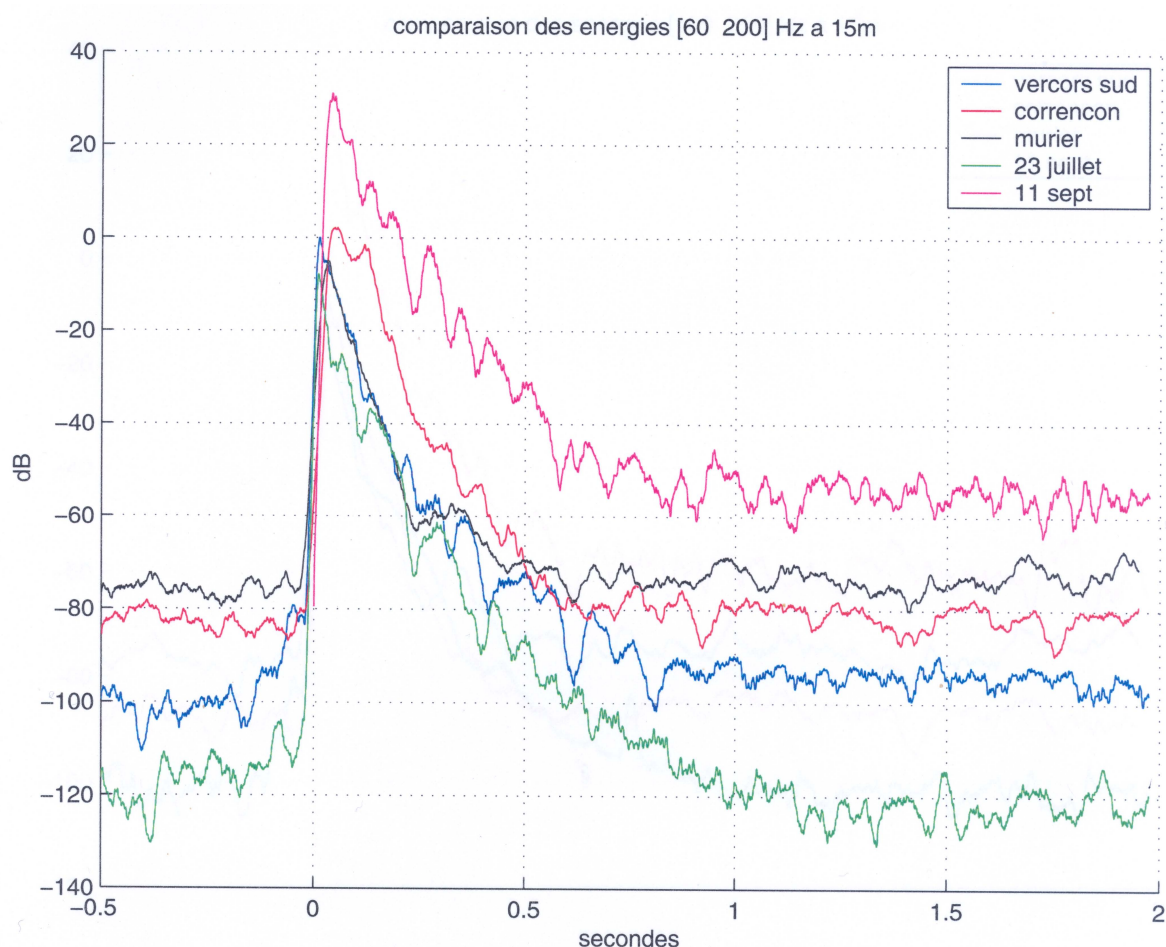


FIG. 3.3 – Coda (intensités moyennes du signal sismique) pour différents sites, à différentes dates.

- *Vercors sud* (courbe bleue) : plateaux sud du Vercors (urgonien), vent faible.
- *Corrençon* (courbe rouge) : Corrençon en Vercors, site à lapiaz (calcaire urgonien érodé), vent.
- *Murier* (courbe noire) : site de remplissage quaternaire (moraine), proche de Grenoble.
- *Vercors sud-23 juil* (courbe verte) : plateaux sud du Vercors (urgonien), pas de vent.
- *Mont Rachais-11 sept* (courbe rose) : 200m au-dessus de Grenoble (pas de $t < 0$), beaucoup de vent, source explosive. Il n'y a pas de pré-trig sur cet enregistrement (bruit avant $t = 0$).

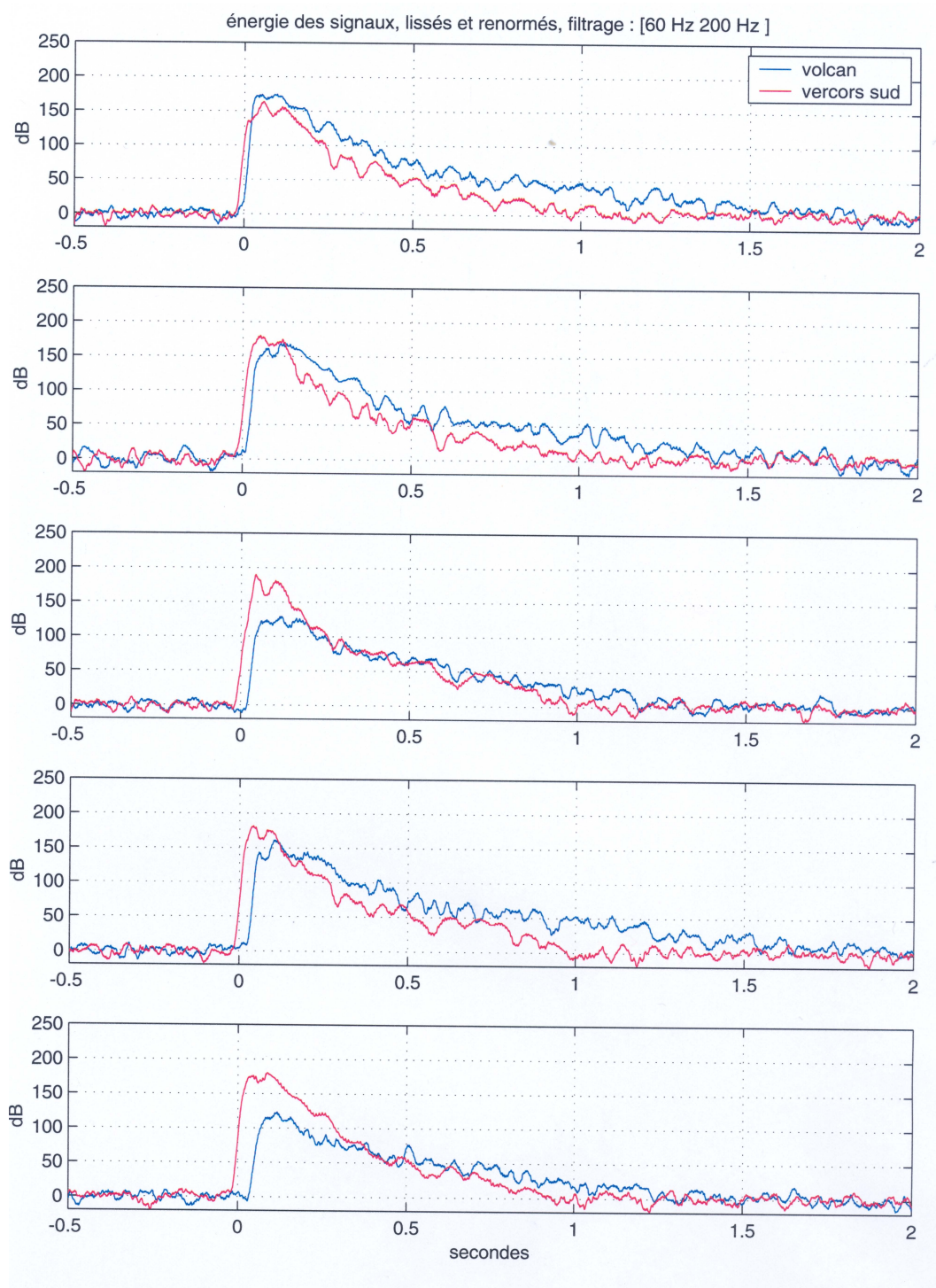


FIG. 3.4 – Comparaison de la coda acquise sur deux sites, dans le sud Vercors urgonien (en rouge) et au pied du Puy des Goules (Auvergne, en bleu). De haut en bas, la distance source-capteurs est de 10 m, 15 m, 20 m, 25 m et 30 m.

3.3 Weak Localization of Seismic Waves

E. Larose, L. Margerin, B. A. van Tiggelen and M. Campillo.
Article publié dans *Physical Review Letters*.

Abstract :

We report the observation of weak localization of seismic waves in a natural environment. It emerges as a doubling of the seismic energy around the source within a spot of the width of a wavelength, which is several tens of meters in our case. The characteristic time for its onset is the scattering mean-free time that quantifies the internal heterogeneity.

Weak localization (WL) is a manifestation of interference of multiply scattered waves in disordered media and was first discovered 20 years ago in quantum physics. It was recognized to be at the origin of novel features in the electronic magnetoresistance at low temperatures [*Sharvin and Sharvin* (1981); *Umbach et al.* (1986); *Kawabata* (1982)], and a genuine explosion of mesoscopic physics followed. The discovery of WL constituted the desired counterexample of the one-century old assertion that multiple scattering of waves destroys wave phenomena, reducing it conveniently to classical radiative transfer, where waves are treated similar to hard spheres colliding with obstacles.

In optics [*Tsang and Ishimaru* (1984); *Van Albada and Lagendijk* (1985); *Wolf and Maret* (1985)] and in acoustics [*Bayer and Niederdrank* (1993); *Tourin et al.* (1997)] the effect is better known as coherent backscattering, where it was shown to be an accurate way to measure transport mean-free paths or diffusion constants. This feature finds its origin in the constructive interference between long reciprocal paths in wave scattering [*Al'tshuler et al.* (1981); *Akkermans et al.* (1986); *van Tiggelen and Maynard* (1998)]. This enhances the probability to return to the source by a factor of exactly 2, which results in the local energy density enhancement by the same factor. In seismic experiments, we expect WL to appear as an enhancement of seismic energy in the vicinity of a source [*Margerin et al.* (2001); *van Tiggelen et al.* (2001)].

In the heterogeneous Earth, the wave propagation becomes complex and wave scattering results in a *seismic coda* [*Sato and Fehler* (1998)], which forms the tail of the seismograms. The coda is not always processed, because it is believed not to contain any structural information that is easily extractable using standard imaging techniques. Nevertheless, coda energy decay is widely recognized to be sensitive to the regional geological environment. During the past two decades, radiative transfer was successfully introduced to model the energy decay of coda waves [*Sato and Fehler* (1998)]. It describes the transport of the wave energy in space and time, but does not take into account phase information.

Radiative transfer predicts the equipartition of waves among different modes [*Weaver* (1982)] which has been observed by *Hennino et al.* (2001), leading to new approaches for

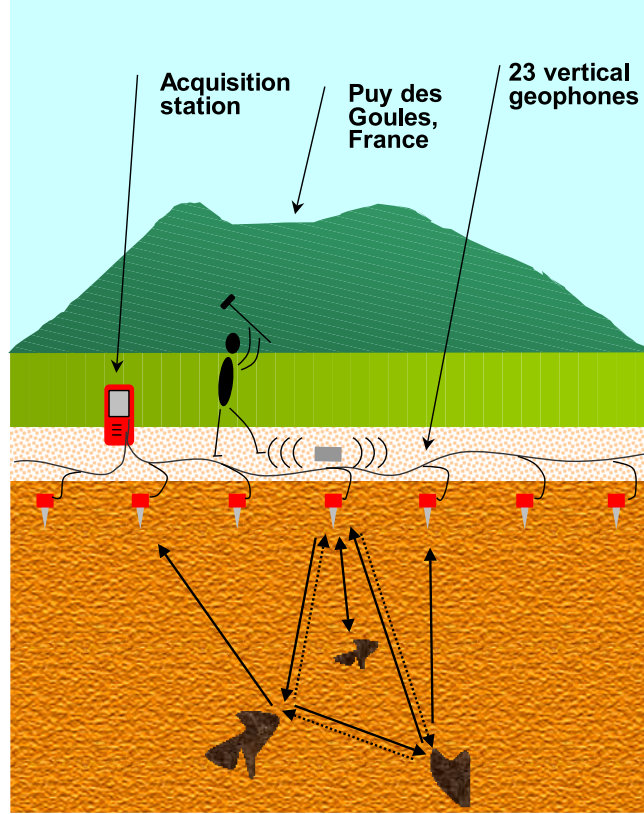


FIG. 3.5 – Experimental setup. Solid and dashed arrows illustrate reciprocal scattered wave paths.

processing coda waves [[Snieder et al. \(2002\)](#); [Campillo and Paul \(2003\)](#)]. However, the WL effect has never been observed in seismology. The aim of this work is to show the relevance of mesoscopic physics to seismology and its necessity to interpret observed seismic records. In this Letter, we present the first observation of WL of seismic waves.

The seismic experiments were undertaken at the Puy des Goules volcano (central France). Volcanoes are known to be very heterogeneous and might guarantee multiple scattering [[Aki and Ferrazzini \(2000\)](#)]. A sketch of the experimental setup is displayed in Fig. 3.5. We have measured the vertical ground motion using a linear array of 23 geophones separated by 2.5 m . The ground motion is the result of a sledgehammer strike at time $t = 0$ on a $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ aluminum plate which was repeated 50 times for each location.

The individual strikes produce forces that may fluctuate slightly in direction around the ideal vertical direction, and may have slightly different frequency contents. By stacking the records of 50 repeated strikes, we simulate a vertical point force which can be considered as a narrow impulse in the $15 - 30\text{ Hz}$ frequency range. Because the receivers are placed at the free surface, the detected waves are both bulk waves (with either compressional or transverse polarization) and surface waves (Rayleigh waves with elliptical polarization),

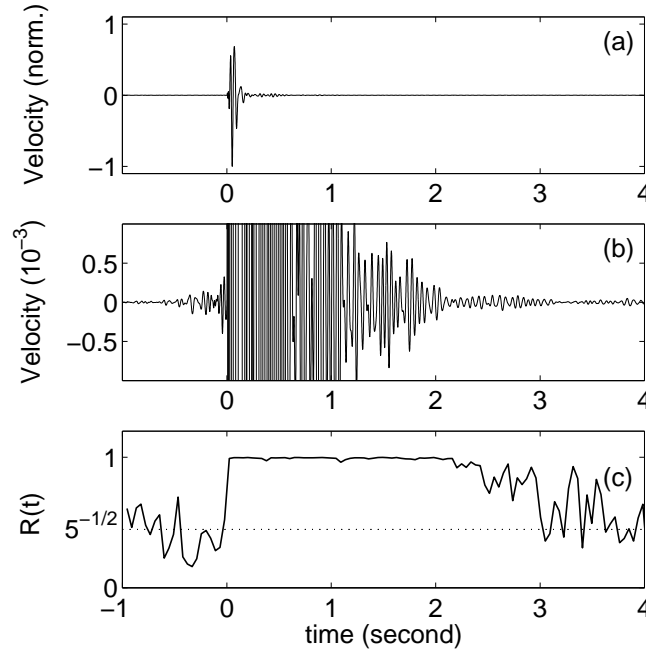


FIG. 3.6 – (a) Example of vertical ground motion signal $s_i(t)$ at the source location. (b) Zoom into the coda. (c) The cumulative ratio R as a function of time, calculated from Eq. 3.4. $R \approx 1/\sqrt{5}$ indicates that the record is dominated by random noise, whereas $R = 1$ indicates that the record is strongly dominated by deterministic waves produced by the impact.

each propagating at its own velocity. The wavelengths λ are roughly ranging from 9 m (30 Hz Rayleigh waves) to 40 m (15 Hz compressional waves). A typical record is presented in Fig. 3.6.

The first 0.5 s of the 3 s signal is composed of direct and simply reflected waves, which are traditionally used in seismic prospecting. In this work we will process the average energy of the subsequent seismic coda. The identification of WL must be accompanied by a close study of different kinds of noise that contaminate the seismic record. In the following discussion, we separate the ambient noise from the one generated by the operator of the hammer, and identify the mesoscopic regime where noise is negligible. Since ambient noise is generated by meteorological phenomena (such as wind) and human activity, the experiments were conducted at night and under anticyclonic conditions. This background noise is stationary and random. All geophones were buried at 20 cm depth to reduce the acoustic signal transmitted by the air and to improve their coupling with the ground. The operator noise is coming from the person manipulating the hammer who is subject to residual movements just before and after the hammer strike. This noise is difficult to separate unambiguously from the signal, because it is local and nonstationary and could be misinterpreted as WL. Fortunately, biophysical studies have revealed that the reproducibility of human motion is limited to frequencies lower than 10 Hz [Forestier and Nougier (1998)].

This suggests that the noise produced by the operator can be considered as random in our frequency band.

In order to verify this property and to test quantitatively how efficient the stacking is in increasing the signal-to-noise ratio, we study the sum of M signals $s_i(t)$ produced by repeated strikes at the same location. Each signal results from $N = 10$ strikes that were automatically stacked in the field. We expect both the ambient and the human noise to add up incoherently ($\propto \sqrt{M}$) while the seismic signal deterministically generated by the impacts should add up coherently ($\propto M$). We analyze the time evolution of the signal-to-noise ratio using the cumulative index R :

$$R(t) = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{\left\langle \left[\sum_{i=1}^M s_i(t) \right]^2 \right\rangle}{\left\langle \sum_{i=1}^M s_i^2(t) \right\rangle}} \quad (3.4)$$

The brackets denote an average over one oscillation period $T = 40 \text{ ms}$. The ratio $R(t)$ takes its maximum value 1 for a perfectly deterministic signal and equals $1/\sqrt{M}$ for pure random noise. Figure 3.6(c) shows an example of $R(t)$, computed for $M = 5$ signals recorded at the source position. It confirms the randomness of the operator noise ($t < 0$) and the deterministic nature of the seismic signal. Between 0 and 2 s, $R(t)$ always exceeds 90% which enables the processing of the coda with an excellent signal-to-noise ratio.

The WL effect finds its origin in the interference of reciprocal, multiply scattered waves, which leads to an enhancement of ensemble-averaged energy of exactly two at the source. Its observation requires the fulfillment of four conditions.

1. Some receivers must be placed less than one wavelength from the source (interference condition).
2. Given the *vertical* force as a source, we must study the energy $E(t)$ associated with the *vertical* seismic motion as a function of source-receiver distance (reciprocity condition) [*van Tiggelen et al. (2001)*; *Trégourès and van Tiggelen (2002c)*].
3. Next, waves must have the time to scatter at least twice (multiple scattering condition).
4. Finally, enhancement is expected to occur only for the *ensemble-averaged* energy because speckles, i.e., random interference patterns, dominate in a single profile.

Because of its random nature, the speckle is suppressed by a configurational average while the deterministic WL effect survives. The only average conceivable in seismology is one over source and receiver positions for a *fixed* source-receiver distance Δr . To this end, we kept the receiver array fixed and we placed the source next to a receiver every 5 m along the array, which provides a total of 12 different configurations. For a diffuse field, the correlation length is $\lambda/2$ [*Shapiro (1986)*], which implies that each of these measurements corresponds to an independent source-receiver configuration for wavelengths of 10 m or less. For larger wavelengths, statistical correlations still persist, which may degrade the

ensemble-averaging process.

To evaluate the spatial enhancement of energy $S(\Delta r)$, we normalize the average energy $\langle E_C \rangle$ around the source by its measured average value $\langle E_D \rangle$ sufficiently far away (15 m) from the source where the energy density is independent of the source-receiver distance Δr . The theoretical prediction for $S(\Delta r)$ at the free surface of an elastic body was obtained in *Trégourès and van Tiggelen (2002c)*. The vertical force generates both bulk and Rayleigh waves, which undergo mode conversions resulting in equipartition in phase space [*Weaver (1982)*; *Hennino et al. (2001)*]. While both waves play a part in the dynamics of scattering, the Rayleigh waves dominate the local energy at the free surface once equipartition is established. As a result, the rigorous expression obtained in Ref. *Trégourès and van Tiggelen (2002c)* can be approximated by the profile predicted for 2-D random media [*de Rosny et al. (2000)*; *Weaver and Lobkis (2000)*] :

$$S(\Delta r) \equiv \frac{\langle E_C \rangle}{\langle E_D \rangle} \approx 1 + J_0^2(2\pi\Delta r/\lambda) \quad (3.5)$$

where λ is the wavelength of the predominant Rayleigh waves and J_0 is the Bessel function. Note that for the near-field regime the size of the WL spot is independent of elapsed time t , contrary to the far field regime [*Bayer and Niederdrank (1993)*; *Tourin et al. (1997)*]. The energy distribution $E(t)$ at each sensor is integrated over one sliding window of one cycle duration. The dynamics are studied by analyzing the signals in nonoverlapping time windows of 0.4 s duration. In each window, $E(t)$ is normalized at each time t by the maximum over the array, and then averaged over the 12 configurations with equal Δr . This procedure compensates for the exponential decay of the total energy, and provides an unbiased average over the different strikes. Finally, we integrate the normalized, averaged energy $\langle E(t, \Delta r) \rangle$ over the entire time window. S is then computed from Eq. 3.5.

In Fig. 3.7, we plot the seismic energy around 20 Hz measured in the coda as a function of source-sensor distance, and for three specific 0.4 s windows. Around 0.3 s only simply reflected waves are recorded and no energy enhancement is visible around the source. The remaining fluctuations are ascribed to the incomplete suppression of speckle. As from 0.7 s, WL is observed with a gradually increasing enhancement factor at the source. After 1.7 s, the profile including the enhancement factor 2 has stabilized, as predicted by the theory for WL in the near field. Therefore, we attribute this enhancement to WL. According to Eq. 3.5, the spot has a spatial extent equal to the wavelength λ . This gives the estimate $c = 260$ m/s for the phase velocity of the Rayleigh waves around 20 Hz. Since at least two scattering events are necessary to generate the enhancement effect, the rise of the enhancement factor corresponds to the transition from the simple to the multiple scattering regime. It was verified in numerical studies [*Margerin et al. (2001)*] that the characteristic time governing the rise of the enhancement factor is the scattering mean-free time t^* . We thus conclude that this important time scale is of the order of 0.7 s around 20 Hz. For a velocity $c = 300$ m/s, this implies a scattering mean-free path $\ell^* \approx 200$ m. We emphasize that this parameter is very difficult to measure with traditional techniques

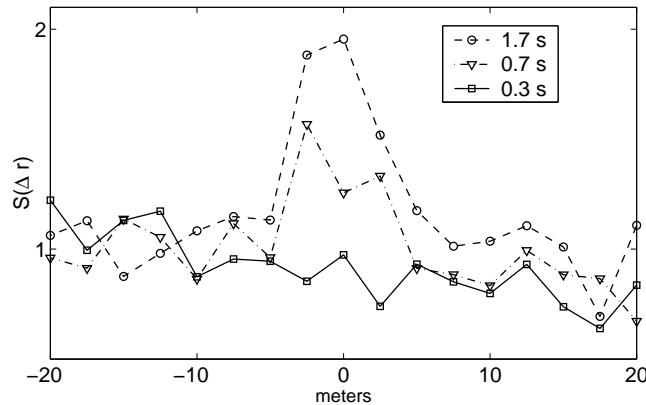


FIG. 3.7 – Energy ratio $S(\Delta r)$ around 20 Hz as a function of source-receiver distance Δr for three different lapse times. The WL effect sets in at a time of roughly 0.7 s, and is fully stabilized at 1.7 s.

based on attenuation studies because absorption is hard to separate from scattering effects.

We have finally studied the frequency dependence of WL. To this end, the seismograms were filtered in three consecutive frequency bands, and the energy profiles were computed as above, though now averaged over the entire coda that exhibits the stabilization of the enhancement $S(\Delta r)$ (Fig. 3.8). Three different WL widths are observed. The values for the wavelengths estimated from a fit to Eq. 3.5 have been indicated. We have separately measured the wavelength of Rayleigh waves from a dispersion analysis of direct arrivals in the original records. Both estimates of the wavelength are consistent and indicate a significant dispersion due to the depth dependence of elastic properties. As a result, the spatial width of WL depends nontrivially upon frequency. Future studies might even reveal the frequency dependence of the scattering mean free path ℓ^* , which would provide precious information on the nature of the heterogeneity.

In conclusion, we have observed weak localization of seismic waves in a shallow volcanic structure, both in space and time. The observation is in good agreement with the near-field theory for weak localization, which predicts a size of one wavelength for the enhancement spot. The study of this effect turns out to offer a unique opportunity to measure the scattering mean-free time without the bias of absorption. We found an estimate of 200 m for the mean-free path for seismic waves around 20 Hz . Though relatively easy to set up, our experiment reveals the mesoscopic nature of seismic waves that have traveled hundreds of meters for Rayleigh waves, and even many kilometers for the compressional waves. As has been the case in nanophysics and in colloid physics, mesoscopic physics may open up new fields of investigation and application in seismology.

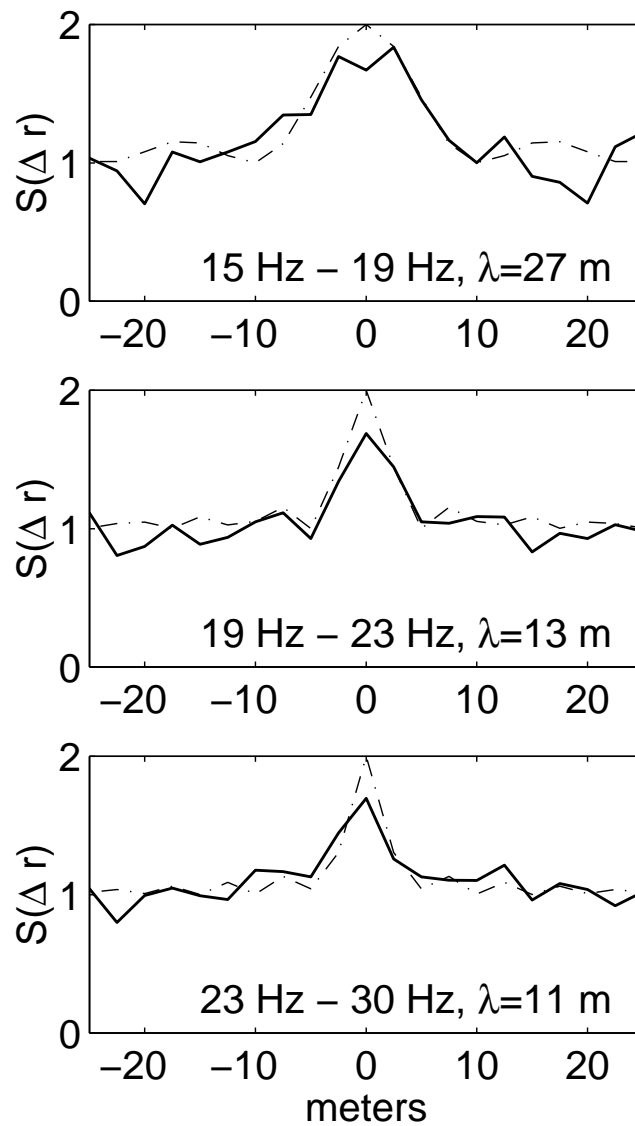


FIG. 3.8 – Observed energy ratio $S(\Delta r)$ (solid lines) for three different frequency bands. The dash-dotted lines represent the theoretical prediction [Eq. 3.5] fitted for the wavelength λ .

3.4 Extension spatiale du cône

3.4.1 Modélisation en milieu diffusant ouvert à 2-D

La propagation d'une onde sismique générée en surface est complexe. Elle se décompose en une propagation 2-D d'onde de Rayleigh, et une propagation dans un demi-espace 3-D pour les ondes de volume. Les diffuseurs ont pour effet de coupler les modes de propagation. En toute rigueur, le modèle théorique d'apparition d'une surintensité à la source dans la coda doit tenir compte de tous ces effets.

Cependant, un calcul complet est fastidieux. Ici nous ne présentons qu'un modèle à 2-D acoustique de localisation faible. Cette approximation est induite par les ordres de grandeur d'intensité des modes de propagation : une source ponctuelle verticale en surface excite essentiellement des ondes de Rayleigh, et réciproquement un capteur vertical en surface est plus sensible aux ondes de Rayleigh. Nous négligerons donc ici l'effet des ondes de volumes. Les ondes de Rayleigh sont analogues à des ondes scalaires dans un espace 2-D, c'est ce régime qui est décrit ci-dessous. Ce modèle est relativement approximatif, cependant deux observations le confortent :

- Le calcul 2-D n'empêche pas de prendre en compte des diffusions de volumes. Par exemple : la source émet une onde de surface, convertie en onde de volume par le premier diffuseur. Ensuite cette onde est diffusée de façon multiple en volume, puis convertie en onde de surface avant d'arriver au détecteur. Dans ce cas la diffusion est volumique, mais la surintensité à la source est liée aux ondes de surface.
- L'interférence à la source des ondes de volume a tendance à élargir la taille du cône de surintensité ($\lambda_P, \lambda_S > \lambda_R$). Nous observons que la taille du cône de surintensité est de l'ordre de grandeur mais toujours un peu plus large que la longueur d'onde de Rayleigh. C'est une indication qui permet de confirmer la prédominance des interférences d'ondes de Rayleigh à la source, avec une faible contribution des ondes de volume.

Supposons une onde scalaire, de pulsation ω , se propageant dans un milieu diffuseur à 2 dimensions (vitesse sans les diffuseurs : c). Elle est émise par la source \mathbf{S} et enregistrée en \mathbf{R} . Soit \mathbf{D}_1 le premier diffuseur rencontré. Statistiquement, l'onde aura parcouru une distance ℓ (libre parcours moyen élastique) avant de trouver ce diffuseur. De même \mathbf{R}_n , le dernier diffuseur rencontré avant d'arriver en \mathbf{R} , est à une distance ℓ de ce capteur.

La propagation de \mathbf{S} à \mathbf{D}_1 est une propagation libre, si ce n'est que, statistiquement, l'onde arrivant au premier diffuseur est atténuée de $e^{-|\mathbf{S}-\mathbf{D}_1|/2\ell}$. L'onde issue du dernier diffuseur connaît le même type de propagation. Elle s'écrit donc :

$$G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1) = \frac{-i}{4} H_0^{(1)}(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{D}_1)) e^{-|\mathbf{S}-\mathbf{D}_1|/2\ell} \quad (3.6)$$

où $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde.

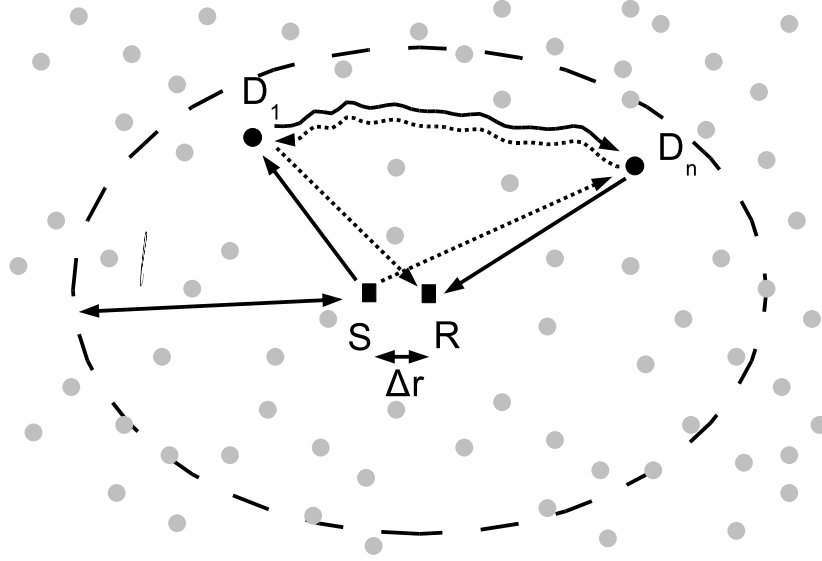


FIG. 3.9 – Schéma de propagation des ondes émises par une source \mathbf{S} , enregistrées par le capteur \mathbf{R} . Les chemins en pointillés sont les chemins réciproques. Si la distance source-capteur Δr est petite devant la longueur d'onde, il y a interférence constructive entre ces chemins. Sinon l'interférence est aléatoire.

Le champ reçu en \mathbf{R} est la somme de tous les trajets possibles dans l'espace à 2 dimensions. C'est donc la somme du trajet $G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, \mathbf{R})$ sur toutes les positions possibles de \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_n . Il ne faut pas oublier de compter tous les trajets réciproques $G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_n, \mathbf{D}_1, \mathbf{R})$.

Il serait impossible de vouloir décrire tous les trajets entre le premier et le dernier diffuseur. Comme nous allons nous intéresser à l'intensité reçue en \mathbf{R} , il est justifié d'approximer la propagation de \mathbf{D}_1 à \mathbf{D}_n par une propagation statistique⁴. Le propagateur $P(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, t)$ est la densité de probabilité qu'une onde partie de \mathbf{D}_1 arrive en \mathbf{D}_n au temps t . Ce propagateur pourra être obtenu par l'équation de transfert radiatif par exemple, ou plus simplement par l'équation de diffusion (D la constante de diffusion) : $\Delta P^2 - D\partial_t P^2 = \delta(t)\delta(\mathbf{r})$

$$P^2(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{|\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1|}{4Dt^2}} \quad (3.7)$$

Le champ reçu en \mathbf{R} s'écrit donc :

$$G(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) = \iint \left\{ \begin{array}{l} G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1) P(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, t) G(\mathbf{D}_n, \mathbf{R}) \\ + G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_n) P(\mathbf{D}_n, \mathbf{D}_1, t) G(\mathbf{D}_1, \mathbf{R}) \end{array} \right\} d\mathbf{D}_1 d\mathbf{D}_n \quad (3.8)$$

⁴au sens de la moyenne d'ensemble : moyenne sur toutes les positions possibles des diffuseurs

3.4.2 Intensité cohérente, intensité incohérente

L'intensité totale $I(t)$ reçue en \mathbf{R} au temps t est :

$$I(t) = \iint G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, \mathbf{R}) + G^*(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, \mathbf{R}) \quad d\mathbf{D}_1 d\mathbf{D}_n \times \\ \iint G^*(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, \mathbf{R}) + G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, \mathbf{R}) \quad d\mathbf{D}_1 d\mathbf{D}_n$$

où $*$ est la conjugaison de phase. L'expansion de cette expression, puis la simplification des termes égaux, permet de dissocier deux contributions : l'intensité cohérente I_{coh} et l'intensité incohérente I_{inc} :

$$I_{inc} = \iint G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1) G^*(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1) P^2(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, t) G(\mathbf{D}_n, \mathbf{R}) G^*(\mathbf{D}_n, \mathbf{R}) \quad d\mathbf{D}_1 d\mathbf{D}_n \\ I_{coh} = \iint G(\mathbf{S}, \mathbf{D}_1) G^*(\mathbf{S}, \mathbf{D}_n) P^2(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_n, t) G(\mathbf{D}_n, \mathbf{R}) G^*(\mathbf{D}_1, \mathbf{R}) \quad d\mathbf{D}_1 d\mathbf{D}_n \quad (3.9)$$

Leur interprétation physique est très différente. Dans l'intensité incohérente, il n'y a pas d'interférence entre 2 trajets distincts. Elle est non-nulle à peu près partout. Par contre, l'intensité cohérente est définie à partir de l'interférence d'un trajet et de son réciproque : interférence de $\mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{R}$ avec $\mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{R}$ par exemple. En moyenne, ces interférences annulent la contribution de l'intensité cohérente. Mais lorsque $\Delta r = |\mathbf{S} - \mathbf{R}| < \lambda$, les deux interférences $\mathbf{D}_1 \mathbf{R} / \mathbf{D}_n \mathbf{R}$ et $\mathbf{D}_1 \mathbf{S} / \mathbf{D}_n \mathbf{S}$ se conjuguent exactement, et l'intensité cohérente tend vers l'intensité incohérente, ce qui double l'énergie autour de la source.

Pour obtenir la forme spatiale de la surintensité à la source $S(\Delta r)$:

$$S(\Delta r) = 1 + \frac{I_{coh}}{I_{inc}} = 1 + |J|^2$$

avec

$$J = \iint G(\mathbf{D}_1, \mathbf{S}) G^*(\mathbf{D}_1, \mathbf{R}) d\mathbf{D}_1$$

il faut calculer I_{inc} et I_{coh} en y substituant les termes G et P par les équations 3.6 et 3.7, puis en effectuant l'intégration en \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_n .

Les deux fonctions de Green $G(\mathbf{D}_1, \mathbf{S})$ et $G(\mathbf{D}_1, \mathbf{R})$ peuvent s'exprimer sous forme de leur transformée de Fourier spatiale :

$$G(\mathbf{D}_1, \mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{i\kappa \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{R})}}{k^2 - \kappa^2 + ik/\ell} d^2\kappa \quad \text{et} \quad G(\mathbf{D}_1, \mathbf{S}) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{-i\kappa' \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{S})}}{k^2 - \kappa'^2 + ik/\ell} d^2\kappa'$$

en intégrant le produit par rapport à \mathbf{D}_1 , il reste :

$$J = \iint \frac{\delta(\kappa - \kappa') e^{-i\kappa' \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{R})}}{(k^2 - \kappa^2 + ik/\ell)(k^2 - \kappa'^2 + ik/\ell)} d^2\kappa d^2\kappa'$$

après intégration sur κ il résulte :

$$J = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{J_0(\kappa \Delta r) \kappa d\kappa}{(k^2 - \kappa^2) + k^2/\ell^2}$$

En utilisant l'égalité $J_0(\kappa\Delta r) = H_0^{(1)}(\kappa\Delta r) + H_0^{(2)}(\kappa\Delta r)$, puis en remarquant que $H_0^{(2)}(\kappa\Delta r) = H_0^{(1)}(-\kappa\Delta r + i\varepsilon)$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$ et enfin après le calcul des résidus, il reste :

$$J = \frac{\pi\ell}{2k} \left[H_0^{(1)}\left(k\Delta r + \frac{i\Delta r}{2\ell}\right) - H_0^{(1)}\left(-k\Delta r + \frac{i\Delta r}{2\ell}\right) \right]$$

Résultat : La forme asymptotique ($\ell \gg \Delta r$) de l'extension spatiale du cône (surintensité), en milieu 2-D acoustique est :

$$S(k\Delta r) = 1 + J_0^2(k\Delta r) \quad (3.10)$$

Cela signifie que l'énergie moyenne rétrodiffusée par le milieu est uniforme le long du réseau de capteur, excepté autour de la source où, sur une longueur d'onde environ, l'intensité mesurée est double.

3.5 Interprétation du paramètre de transport t^*

3.5.1 Milieu simplement/multiplement diffusant

La différence entre un milieu simplement diffusant et un milieu multiplement diffusant tient à la valeur de temps de libre parcours moyen de transport t^* , rapporté au temps d'observation. Un milieu simplement diffusant est un milieu dans lequel ce temps est très grand, c'est-à-dire grand devant le temps d'enregistrement. En général, tous les sols sont multiplement diffusants, pour peu que leur facteur d'absorption soit suffisamment faible, et que l'on puisse enregistrer la coda suffisamment longtemps.

3.5.2 Jusqu'où faut-il traiter la coda pour l'imagerie standard ?

Une expérience d'imagerie sismique active, repose sur une hypothèse de diffusion simple⁵. Au delà du temps libre moyen, les ondes ayant subi plusieurs diffusions sont plus énergétiques que les ondes simplement diffusées. L'imagerie est impossible au-delà de t^* . Dans une expérience de sismique réfraction, la quantité mesurée est le temps d'arrivée de l'onde balistique. L'onde est atténuée par les diffuseurs, le temps d'atténuation est très proche du temps libre moyen t^* ⁶. Très schématiquement, le front d'onde direct n'est plus mesurable au bout de $10 t^*$. Accessoirement, lorsque le milieu est diffuseur, le temps d'arrivée de l'onde balistique peut fluctuer fortement au sein d'un même milieu, l'erreur relative augmente avec l'hétérogénéité du milieu.

⁵parfois on parle d'approximation de Born

⁶sauf dans le cas diffuseurs résonnants ou très anisotropes

Site	t^*	fréquence	référence
Volcan (Merapi)	0.1 s	10 Hz	<i>Wegler and Lühr (2001)</i>
Volcan (Auvergne)	0.7 s	20 Hz	<i>Larose et al. (2004b)</i>
Croûte (Mexico)	10 s	1 Hz	<i>Margerin et al. (1999)</i>
Croûte (France)	60 s	2 Hz	<i>Lacombe et al. (2003)</i>
Manteau	2000 s	1 Hz	<i>Margerin and Nolet (2003)</i>

TAB. 3.1 – Exemple de temps libres moyens

Une étude des propriétés de diffusion d'un milieu peut donc être nécessaire avant ou pendant une expérience d'imagerie sismique. La mesure du temps de libre parcours moyen renseigne en elle-même sur les propriétés du milieu, elle peut donc aussi être vue comme une fin en soi.

Chapitre 4

Extraction de la fonction de Green par corrélation de champs d'onde, interprétation Retournement Temporel

4.1 Corrélation de champ d'onde en milieu fermé

Dans un premier temps, nous présentons le formalisme des fonctions de Green pour l'équation d'onde élastique. Le détail du développement de la fonction de Green en modes propres du système est proposé. Il est aussi précisé la dimension de chacun des termes. Cela permettra ensuite de comprendre pourquoi il ne faut pas *toujours* dériver les corrélations pour obtenir la réponse impulsionnelle.

4.1.1 Fonction de Green élastique d'un volume fermé

Pour les ondes élastiques, en milieu éventuellement inhomogène, l'équation d'onde qui relie le déplacement local \mathbf{u} à la force volumique source \mathbf{f}_0 s'écrit (pour la composante i) :

$$-\rho(\mathbf{x})\partial_{tt}u_i + \partial_i(\lambda(\mathbf{x}) \partial_k u_k) + \partial_j(\mu(\mathbf{x})(\partial_i u_j + \partial_j u_i)) = f^i(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé.

G , la fonction de Green (tenseur d'ordre 2), est la réponse du système à une impulsion. Elle s'exprime en $[m.s^{-1}.N^{-1}]$ et permet de calculer le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ [en m] en fonction d'une source de force volumique $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t')$ [en $N.m^{-3}$]. Le déplacement est la convolution de la source de force par la fonction de Green, ce qui s'écrit :

$$u^i(\mathbf{x}, t) = \int_{\vartheta} \int_{-\infty}^t G^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') f^j(\mathbf{y}, t') d^3\mathbf{y} dt' = G \otimes f \quad (4.2)$$

où \otimes représente la convolution temporelle, et ϑ est le volume de la cavité. Pour condenser les notations, il est pratique d'introduire l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ défini par : $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} u_i = \partial_i(\lambda(\mathbf{x}) \partial_k u_k) + \partial_j(\mu(\mathbf{x})(\partial_i u_j + \partial_j u_i))$. L'équation des ondes s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{L}_{\mathbf{x}} - \rho(\mathbf{x})\partial_{tt}] G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{f}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t) \\ + \text{Conditions aux bords} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Le passage dans le domaine des fréquences temporelles (transformée de Fourier) de l'équation d'onde 4.3 donne :

$$[\mathcal{L}_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{x})\omega^2] G_{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.4)$$

Soient $\phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ les modes propres de la cavité. Ce sont les "déplacements propres" de la cavité à une constante de normalisation près. Ils s'expriment en $[kg^{-1/2}]$. Ce sont aussi les fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ (avec les bonnes conditions aux limites), c'est-à-dire les invariants de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ associés aux valeurs propres $-\rho(\mathbf{x})\omega_n^2$:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})\omega_n^2 \phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

Les $\phi_{\mathbf{n}}$ forment une base complète orthonormée :

$$\int_{\vartheta} \rho(\mathbf{r}) \phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \delta_{nm}$$

Cette relation dérive de la conservation de l'énergie élastique. Il est important de noter que cette relation définit un produit scalaire entre modes sur le volume ϑ de la cavité. Il est possible d'écrire la fonction de Green sous forme de développement modal :

$$G_{\omega}^{ij+}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_n \frac{\phi_n^i(\mathbf{x}) \phi_n^j(\mathbf{y})}{\omega^2 - \omega_n^2 + i\varepsilon} \quad [s^2 kg^{-1}] \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (4.5)$$

La transformée de Fourier inverse permet de retrouver la fonction de Green *causale* (exposant +) dans le domaine temporel :

$$G^{ij+}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_n \phi_n^i(\mathbf{x}) \phi_n^{j*}(\mathbf{y}) \int_{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_n^2 + i\varepsilon} \frac{d\omega}{2\pi} \right\}$$

et par le théorème des résidus :

$$G^{ij+}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \theta(t) \sum_n \phi_n^i(\mathbf{x}) \phi_n^j(\mathbf{y}) \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \quad [m.N^{-1}.s^{-1}] \quad (4.6)$$

où $\theta(t)$ est la fonction de Heaviside.

4.1.2 Corrélacion d'un couple de réponses impulsives

Soient $G^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ et $G^{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$ les deux réponses impulsives enregistrées en \mathbf{y} (composante j) et \mathbf{z} (composante k) lorsqu'une impulsion est émise en \mathbf{x} en $t = -\infty$ suivant la composante i . L'enregistrement est effectué de t_i à $t_i + \Delta T$. ΔT est donc la durée d'enregistrement. La corrélation temporelle non renormalisée $\langle G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)G(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t + \tau) \rangle = C_{yz}(\tau)$ est définie par :

$$C_{yz,jk}^{\Delta T}(\tau) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_i}^{t_i + \Delta T} G^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) G^{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t + \tau) dt \quad (4.7)$$

4.1.3 Résolution du temps de Heisenberg

En passant dans le domaine des fréquences l'équation de la corrélation 4.7, et après intégration sur le temps ΔT il vient :

$$C_{yz,jk}^{\Delta T}(\tau) = \iint_{\infty} G^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) G^{ik*}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \omega') 2 \text{sinc}[(\omega - \omega')\Delta T] e^{-i\omega'\tau} e^{i\frac{\omega - \omega'}{2}(\Delta T + 2t_i)} d\omega d\omega' \quad (4.8)$$

Le point central de cette équation est le "sinus cardinal". En effet lorsque son argument tend vers 0, il vaut 1.

Les modes de la cavité¹, sont caractérisés par leur fréquence ω_n . La *distance moyenne* entre les modes est $\delta\omega$. L'inverse de cette pulsation est le temps de Heisenberg T_H [*de Rosny* (2000)]. Il correspond à la densité de mode $n(\omega)$ autour de la pulsation ω donnée :

$$T_H = n(\omega) = 2\pi/\delta\omega \quad (4.9)$$

Le temps de Heisenberg (appelé aussi *Break Time*) est la durée qu'il faut attendre pour résoudre les modes d'une cavité. C'est par exemple le temps d'enregistrement nécessaire pour pouvoir séparer des modes lors du calcul du spectre par transformée de Fourier (cf fig. 4.1). L'estimation de T_H repose donc sur l'estimation des densités modales. En général, il est pratique de commencer par calculer le nombre de modes total $N(\omega)$ compris entre les pulsations 0 et ω [*Kittel* (1969)], puis de dériver cette quantité. Pour une onde scalaire 1D dans segment de longueur L , les modes sont décrits par leur nombre d'onde : $k_0 = \pi/L$, $k_1 = 2\pi/L$, $k_2 = 3\pi/L \dots k_{max} = N\pi/L$ avec $N = \pi L\omega/v$ (v la célérité de l'onde). Pour une onde 3-D acoustique :

$$T_H = n(\omega) = \frac{\partial N}{\partial \omega} = 3 \frac{\pi^3 L^3 \omega^2}{v^3}$$

¹La distribution des fréquences propres d'un milieu chaotique (cavité aux bords aléatoires) suit une distribution de Wigner. La probabilité que deux modes soient distants de $\Delta\omega$ est :

$$P(\Delta\omega) = \frac{\pi}{2} \Delta\omega e^{-\frac{\pi}{4} \Delta\omega^2}$$

Cette distribution traduit un phénomène caractéristique du chaos ondulatoire, appelé répulsion de niveau (*level repulsion*), ou encore rigidité spectrale.

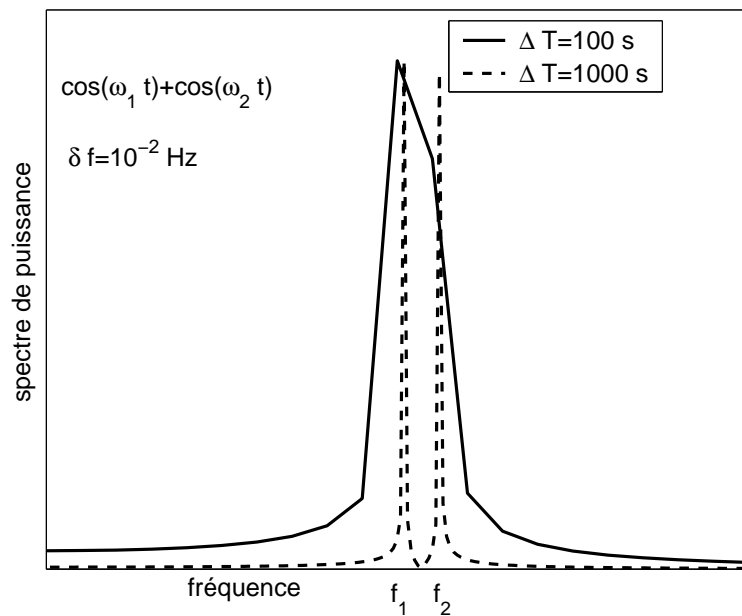


FIG. 4.1 – Spectre de puissance de la réponse d'un système physique à deux modes, dont les deux raies spectrales ω_1 et ω_2 sont séparées de 10^{-2} Hz . Le spectre est obtenu par transformée de Fourier pour deux longueurs différentes ΔT d'enregistrement. Le temps de Heisenberg de ce système est donc $T_H = 1/\delta f = 100 \text{ s}$. Pour une durée de l'ordre de $\Delta T = 100 \text{ s}$, les 2 raies ne sont pas encore résolues (trait plein). Pour un temps d'enregistrement bien supérieur ($\Delta T = 1000 \text{ s} \gg T_H$) la résolution est suffisante (trait pointillé) et les deux raies sont bien séparées.

Pour un solide élastique, les ondes P ont une polarisation possible et les ondes S en ont deux. Sachant que leur vitesse respective est v_P et v_S , il vient :

$$T_H = 3\pi^3 L^3 \omega^2 \left(\frac{1}{v_P^3} + \frac{2}{v_S^3} \right)$$

Ce temps vaut :

$$T_H = 3\vartheta f^2 \left(\frac{1}{v_P^3} + \frac{2}{v_S^3} \right) \quad (4.10)$$

ϑ est le volume de la cavité (L^3). Par exemple, pour une cavité élastique de $10 \times 10 \times 10$ mm en aluminium, autour de 1 MHz, ce temps vaut : 100 μs , soit une centaine d'oscillations. Ce temps augmente donc avec le cube de la taille du milieu, et le carré de la fréquence centrale.

Application aux corrélations de champs

Revenons au calcul de la corrélation à deux points du champ élastique d'une cavité. Si le temps d'intégration ΔT est plus grand que le temps d'Heisenberg de la cavité :

$$\Delta T \gg T_H = \left\langle \frac{1}{\omega_n - \omega_m} \right\rangle \quad (4.11)$$

alors le sinus cardinal est proportionnel à $\delta(\omega_n - \omega_m)$ et la corrélation s'écrit :

$$C_{yz,jk}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n,m} \frac{1}{\omega_n \omega_m} \phi_n^i(\mathbf{x}) \phi_n^j(\mathbf{y}) \phi_m^i(\mathbf{x}) \phi_m^k(\mathbf{z}) \delta(\omega - \omega_n) \delta(\omega - \omega_m) e^{i\omega\tau} d\omega$$

ce qui se simplifie en :

$$C_{yz,jk}(\tau) = \sum_n \phi_n^i(\mathbf{x}) \phi_n^i(\mathbf{x}) \phi_n^j(\mathbf{y}) \phi_n^k(\mathbf{z}) \frac{e^{i\omega_n\tau}}{\omega_n^2}$$

où l'on reconnaît la corrélation de deux fonctions de Green :

$$\partial_\tau C_{yz}(\tau) = G(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau) \times G(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \tau) \quad (4.12)$$

La corrélation contient donc la fonction de Green entre les 2 points de mesure \mathbf{y} et \mathbf{z} , corrélée par la fonction de Green de la source sur elle-même. Ce résultat a été proposé par [Draeger and Fink \(1999\)](#) dans le cadre d'ultrasons excitant une cavité chaotique de silicium. Ils établissent ainsi l'équation de la cavité (*cavity equation*) :

$$G_{xy} \times G_{xz} = G_{xx} \times G_{yz} \quad \Delta T \gg T_H \quad (4.13)$$

Notons qu'en général $G_{xx}(t)$ est essentiellement un pic en $t = 0$ suivi de la réponse du milieu, d'amplitude beaucoup plus faible que l'émission de la source : $G_{xx}(t) \sim \delta(t)$. Dans

ce cas la corrélation donne essentiellement la fonction de Green G_{yz} . Lorsque cette approximation n'est plus valable, il faut en toute rigueur effectuer une opération de déconvolution du terme G_{xx} , opération délicate et fastidieuse².

Résultat : Si l'on intègre la corrélation à deux points d'un champ enregistré dans une cavité pendant un temps supérieur au temps de Heisenberg, alors cette corrélation contient la fonction de Green entre les deux points de mesure.

4.1.4 Faut-il dériver les corrélations ?

Comme nous venons de le voir, la dérivée de la corrélation du champ de déplacement cache la fonction de Green du milieu entre les deux points de mesure. Une analyse dimensionnelle rapide semble indiquer qu'il faut *toujours* dériver les corrélations pour obtenir la fonction de Green. Ce résultat est-il justifié pour n'importe quel type de champ ?

La réponse tient à l'analyse précise des dimensions du champ enregistré et de la fonction de Green que nous souhaitons reconstruire. Ainsi, dans le cas présenté plus haut où nous enregistrons le *déplacement*, nous cherchons à reconstruire la fonction de Green qui relie le *déplacement* à la *force* source. Il faut alors dériver la corrélation. Si maintenant nous enregistrons et corrélons la *vitesse*, et cherchons à reconstruire la fonction de Green qui relie la vitesse à la force source, alors il ne faut pas dériver. Enfin si nous enregistrons l'*accélération*, et souhaitons reconstruire la fonction de Green qui relie l'*accélération* à la *force* source, alors il faut intégrer la corrélation.

Nous voyons donc qu'il n'y a pas de loi générale qui détermine la nécessité de dériver les corrélations pour reconstruire la fonction de Green, tout dépend des dimensions du champ enregistré et du type de fonction de Green que nous cherchons à reconstruire.

Étudions enfin le cas particulier du champ acoustique enregistré au moyen de capteurs piézoélectriques. Sans rentrer dans les détails de la conversion physique de la tension imposée aux bornes du cristal en déplacement ou pression, notons simplement que nous émettons une tension et enregistrons une tension. Aucune opération de dérivée n'est nécessaire si l'on corrige la corrélation par l'auto-corrélation du signal source.

Résultat : Lorsque l'on traite des enregistrements de déplacements, il faut dériver la corrélation pour obtenir la fonction de Green. Lorsque l'on traite des vitesses, il n'y a pas d'opération à appliquer. Enfin lorsque l'on traite

²Plus loin dans le manuscrit, il est proposé de moyennner les corrélations sur la position de la source x . Dans ce cas, la déconvolution n'est plus nécessaire car $\sum_x G_{xx}(t) \rightarrow \delta(t)$.

des données accélérométriques, il faut intégrer la corrélation pour retrouver la fonction de Green. Notons que l'opération de dérivation temporelle dépend aussi du terme source de fonction de Green (déplacement, vitesse, accélération, pression...).

4.1.5 Équipartition thermique

En général il est très difficile d'obtenir des enregistrements d'une durée plus longue que le temps de Heisenberg T_H . Reprenons notre exemple de cavité en aluminium excitée à 1 MHz . Si ses dimensions sont $10 \times 10 \times 10$ mm alors nous avons vu que ce temps vaut 100 μs . Si maintenant les dimensions sont portées à $100 \times 100 \times 100$ mm , alors ce temps vaut 100 000 μs , durée très difficile à acquérir. [Weaver and Lobkis \(2001\)](#) proposent une autre méthode pour obtenir la réponse impulsionnelle au travers des corrélations de champs : la corrélation d'enregistrements longs de bruit thermique. Le champ enregistré en \mathbf{y} et \mathbf{z} est :

$$u(\mathbf{y}, t) = \text{Re} \sum_n A_n \phi_n(\mathbf{y}) e^{i\omega_n t} \quad (4.14)$$

$$v(\mathbf{z}, t) = \text{Re} \sum_m A_m \phi_m(\mathbf{z}) e^{i\omega_m t} \quad (4.15)$$

la corrélation s'écrit alors :

$$C_{yz}(\tau) = \left\langle \sum_{n,m} A_n \phi_n(\mathbf{y}) A_m^* \phi_m(\mathbf{z}) e^{i(\omega_n - \omega_m)t - i\omega_m \tau} \right\rangle_{thermal}$$

La moyenne thermique est une moyenne sur différentes réalisations du bruit thermique (les sources thermiques caractérisent l'amplitude et la phase des coefficient A_n [$m \cdot kg^{\frac{1}{2}}$]). Les réalisations du bruit sont aléatoires et décorrélées :

$$\langle A_n A_m \rangle_{thermal} = \frac{2kT}{\omega_n^2} \delta_{nm} \quad [J \cdot s^2 = m^2 \cdot kg^1]$$

$2kT/\omega_n^2$ est le spectre de puissance du bruit thermique. Si l'on suppose que le bruit thermique est ergodique, il est possible d'observer plusieurs réalisations indépendantes du bruit (tirage aléatoire des phases des A_n) simplement en laissant s'écouler le temps.

Résultat : La dérivée de la corrélation à deux points d'un champ d'onde aléatoire d'origine thermique (ergodique) moyennée sur le temps converge vers la fonction de Green du système entre ces deux points :

$$\partial_\tau C_{yz}(\tau) = \left\langle \sum_n \frac{2kT}{\omega_n} \phi_n(\mathbf{y}) \phi_n(\mathbf{z}) e^{-i\omega_n \tau} \right\rangle_{thermal} = 2kTG(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau)$$

4.1.6 Le Théorème Fluctuation Dissipation

La possibilité de retrouver la fonction de Green à partir des fluctuations d'un champ n'est pas récente. En particulier le Théorème Fluctuation-Dissipation (FDT) relie de façon formelle les fluctuations d'un champ $\xi(r, t)$ à la réponse linéaire du système (la dissipation par exemple) [*Kubo* (1966)].

Rytov et al. (1989) proposent d'étendre ce théorème aux ondes élastiques et électromagnétiques à l'équilibre thermique. Leur démonstration est essentiellement celle proposée dans la section précédente. Il est important de noter que cette forme dérivée du FDT s'applique à un système *sans* dissipation, la moyenne invoquée étant thermique (moyenne sur les réalisations indépendantes des sources).

Il est aussi possible d'invoquer une application plus directe du FDT pour les ondes élastiques, dans laquelle nous utiliserons une moyenne d'ensemble (moyenne sur les réalisations du désordre du milieu). Dans ce cas les corrélations du champ élastique sont reliées à la fonction de Green effective du milieu, dans laquelle le terme de dissipation est le libre parcours moyen : distance moyenne d'atténuation de l'onde cohérente par diffusion. C'est la démarche proposée par *van Tiggelen* (2003).

Il est important de noter que les systèmes dans lesquels se propagent des ondes élastiques ne sont pas ergodiques : la moyenne du champ sur le temps et la moyenne sur le "désordre" sont différentes. Dans le cas très particulier de la refocalisation d'une onde acoustique par retournement temporel, et lorsque la refocalisation est effectuée loin d'un milieu diffuseur, nous observons que cette approximation d'ergodicité semble valide.

Résultat : L'émergence de la Fonction de Green dans les corrélations de champ élastique peut être interprétée comme une application du théorème Fluctuation-Dissipation (FDT). Lorsque l'on réalise une moyenne thermique (moyenne sur les sources : leur position, durée, énergie etc...) ou sur le temps, les corrélations sont reliées à la fonction de Green *réelle* du milieu. Lorsque l'on réalise une moyenne d'ensemble (moyenne sur les réalisations du milieu), les corrélations sont reliées à la fonction de Green *effective* du milieu.

4.2 Corrélation en milieu ouvert homogène

Lorsqu'une onde se propage en milieu ouvert, la décomposition modale n'est plus discrète mais continue :

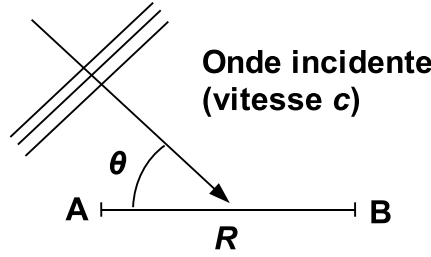
$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{y}) e^{i\omega_n t} \rightarrow \int_{\infty} \phi_{\omega}(\mathbf{x}) \phi_{\omega}(\mathbf{y}) e^{i\omega t} d\omega$$

c'est-à-dire que l'espacement fréquentiel entre les modes tend vers 0. Le temps de Heisenberg tend vers l'infini, il n'est plus possible de séparer les modes par une simple intégration temporelle sur une durée finie. Au lieu de moyenner sur le temps, une autre solution est envisagée : moyenner sur l'espace = sur la position de la source.

4.2.1 Sources en champ lointain

Une source est placée dans le champ lointain en champ d'un couple de capteur A, B . Le champ enregistré en A (resp. B) est $h_A(t)$ (resp. $h_B(t)$). L'onde plane incidente (fig. 4.2.1) est complètement déterminée par sa direction de propagation θ :

$$h_A(t) = \delta(t) \quad h_B(t) = \delta\left(t - \frac{R}{c} \cos(\theta)\right)$$



La corrélation des champs reçus en A et B pour une onde d'incidence θ est :

$$C_{AB,\theta}(\tau) = \delta\left(\tau - \frac{R}{c} \cos(\theta)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\tau - \frac{R}{c} \cos(\theta)\right)} d\omega$$

Effectuons la moyenne de la corrélation sur toutes les directions d'incidence θ et φ (à 3-D) :

$$C_{AB}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left[\tau - \frac{R}{c} \cos(\theta)\right]} \sin(\theta) d\varphi d\theta d\omega$$

$$C_{AB}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\left(\tau - \frac{R}{c}\right)} - e^{i\omega\left(\tau + \frac{R}{c}\right)}}{R\omega/c} d\omega$$

$$\partial_\tau C_{AB}(\tau) = \frac{c}{R} (\delta(\tau - R/c) - \delta(\tau + R/c)) \quad (4.16)$$

Résultat : La dérivée de la corrélation à deux points d'une onde plane moyennée sur toutes les directions d'incidence est proportionnelle à la fonction de Green entre les 2 points de mesure :

$$\partial_\tau C_{AB}(\tau) = \frac{R}{c} (G^+(A, B, t) - G^-(A, B, t))$$

G^+ et G^- sont les fonctions de Green causales et acausales.

4.2.2 Sources en champ proche : théorème de la phase stationnaire

[Snieder \(2004\)](#)³ propose d'étendre le calcul de la corrélation du champ aux sources en champ proche. En invoquant le théorème de la phase stationnaire (qui est une approximation), il a montré que la moyenne des corrélations sur la position des sources converge vers la fonction de Green du milieu. En voici une démonstration détaillée.

Plaçons à nouveau un couple de capteur A et B en $x = \pm R/2$, $y = 0$, $z = 0$. Cette fois-ci, la position de la source S (x, y, z) est quelconque. La distance source récepteur est :

$$r_A = \sqrt{(x + R/2)^2 + y^2 + z^2} \quad r_B = \sqrt{(x - R/2)^2 + y^2 + z^2}$$

La fonction de Green (acoustique à 3-D) en A et B est :

$$G_{SA}(t) = \frac{c}{4\pi r_A} \delta(r_A - ct)$$

$$G_{SB}(t) = \frac{c}{4\pi r_B} \delta(r_B - ct)$$

et la corrélation pour une source S donnée s'écrit :

$$C_{AB}^S(\tau) = \frac{c^2}{(4\pi)^2 r_A r_B} \delta\left(\tau - \frac{r_A - r_B}{c}\right)$$

soit dans le domaine fréquentiel :

$$C_{AB}^S(\omega) = \frac{c^2}{(4\pi)^2 r_A r_B} e^{i\frac{\omega}{c}(r_A - r_B)}$$

Comme dans le cas du champ lointain, il est possible d'effectuer une moyenne des corrélations sur les positions possibles de la source S, mais cette fois-ci il y a 3 degrés de liberté (x, y, z) en non plus 2 (θ, φ). La densité n de sources S est uniforme dans tout l'espace :

$$C_{AB}(\omega) = \int_{\infty} n \frac{c^2}{(4\pi)^2 r_A r_B} e^{i\frac{\omega}{c}(r_A - r_B)} dx dy dz$$

³[Roux et al. \(2005\)](#) proposent un changement de variable astucieux qui permet de conduire l'intégration sur le volume infini sans invoquer l'approximation de la phase stationnaire.

On peut appliquer la méthode du col (ou théorème de la phase stationnaire). Très brièvement, le principe de cette méthode consiste à ne retenir d'une exponentielle complexe QUE la contribution du terme correspondant à l'annulation de la dérivée de l'argument. Partout ailleurs en effet, l'exponentielle oscille continuellement et son intégrale tend vers 0.

$$\int g(x)e^{if(x)}dx = g(x_0)e^{if(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}$$

avec $f'(x_0) = 0$. Nous allons donc appliquer deux fois ce théorème, pour la variable y puis pour la variable z de l'argument.

La première étape consiste à repérer le "point de rebroussement" de l'argument :
 $\partial_y(r_A - r_B) = y(r_A^{-1} - r_B^{-1})$ et $\partial_{yy}(r_A - r_B) = r_A^{-1} - r_B^{-1} - y^2(r_A^{-3} - r_B^{-3})$
 $\partial_y(r_A - r_B)$ a un minimum en $y = 0$

$$\partial_{yy}(r_A - r_B)_{y=0} = \frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \Big]_{y=0}$$

et on réduit l'intégrale d'un degré :

$$C_{AB}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nc^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{(r_A r_B)_{y=0}} e^{i\frac{\omega}{c}(r_A - r_B)_{y=0}} \left[\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c} |\partial_{yy}(r_A - r_B)_{y=0}|} \right]^{1/2} dx dz$$

$$C_{AB}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nc^2}{(4\pi)^2} \left| 2\pi \frac{c}{\omega} \frac{r_A r_B}{r_A - r_B} \right|_{y=0}^{1/2} \frac{1}{(r_A r_B)_{y=0}} e^{i\frac{\omega}{c}(r_A - r_B)_{y=0}} dx dz$$

La même opération pour la dimension z donne :

$$C_{AB}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nc^2}{(4\pi)^2} \left| 2\pi \frac{c}{\omega} \frac{r_A r_B}{r_A - r_B} \right|_{y,z=0}^{1/2} \frac{1}{(r_A r_B)_{y,z=0}} e^{i\frac{\omega}{c}(r_A - r_B)_{y,z=0}} \left[\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c} |\partial_{zz}(r_A - r_B)_{y,z=0}|} \right]^{1/2} dx$$

qu'on peut réduire avec

$$\partial_{zz}(r_A - r_B)_{y=0} \Big]_{z=0} = \frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \Big]_{y,z=0}$$

avec $x_A = |x + R/2|$ et $x_B = |x - R/2|$

$$C_{AB}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nc^2}{(4\pi)^2} 2\pi \frac{c}{\omega} \frac{1}{|x_A - x_B|} e^{i\frac{\omega}{c}(x_A - x_B)} dx$$

$$C_{AB}(\omega) = \frac{c^3}{4\omega} \frac{e^{ikR} + e^{-ikR}}{R}$$

Résultat : Lorsque des sources $S(x, y, z)$ sont distribuées partout et de façon homogène dans un milieu à 3 dimensions, la corrélation C_{AB} moyennée sur leur position (x, y, z) tend à *annuler* les contributions des sources qui ne sont pas dans l'axe des capteurs AB , et à *cumuler* la contribution des sources dans l'axe. Alors la dérivée des corrélations moyennées sur toutes les positions des sources conduit à :

$$\partial_\tau C_{AB}(\tau) \propto G_{AB}^+(\tau) - G_{AB}^-(\tau)$$

G^+ et G^- sont les fonctions de Green causales et acausales.

4.3 Analogie entre corrélation et Retournement Temporel

Recovering the Green's function from field-field correlations in an open scattering medium.

A. Derode, E. Larose, M. Tanter, J. de Rosny, A. Tourin, M. Campillo, M. Fink.
Article publié dans *Journal of the Acoustical Society of America*.

Abstract :

The possibility of recovering the Green's function from the field-field correlations of coda waves in an open multiple scattering medium is investigated. The argument is based on fundamental symmetries of reciprocity, time-reversal invariance and the Helmholtz-Kirchhoff theorem. A criterion is defined, indicating how sources should be placed inside an open medium in order to recover the Green's function between two passive receivers. The case of noise sources is also discussed. Numerical experiments of ultrasonic wave propagation in a multiple scattering medium are presented to support the argument.

Wave propagation in a multiple scattering or reverberating environment has been a subject of interest in a wide variety of domains ranging from solid state physics to optics or acoustics. Ultrasound is particularly interesting because it allows a direct measurement of the field fluctuations, both in amplitude and in phase. In connection with this, a remarkable work by [Weaver and Lobkis \(2002\)](#); [Lobkis and Weaver \(2001\)](#); [Weaver and Lobkis \(2001\)](#) recently showed that the Green's function between two points could be recovered from the field-field correlation of a diffuse ultrasonic field. This amounts to do "ultrasonics without a source" since they showed that thermal noise could be used instead of a direct pulse/echo measurement between the two points. The experiment was carried out in an aluminium block, and the theoretical analysis was based on discrete modal expansion of the field, with random modal amplitudes. Applications are promising : it would be possible to recover the Green's function of a complex medium just by correlating diffuse fields received on passive sensors (application to shallow water ocean acoustics, where the

field is not diffuse but propagates in a wave guide, was also evoked [*Roux and Fink (2003)*]).

However, the basic assumption in the theoretical analysis is that the medium is closed and free of absorption. In a real medium, absorption will tend to cut out the longest scattering (or reverberating) paths, and discrete modes will not be resolved any more. Similar problems are expected if the medium is open rather than closed (actually, in an open medium, the fluctuation-dissipation theorem [*Weaver and Lobkis (2001)*] establishes the result, as long as the field is diffuse in the thermal sense). The aim of this letter is to examine whether the Green's function can still be recovered from the correlations of an ultrasonic wave field in an open scattering medium, when a discrete expansion on orthogonal modes is no longer relevant and the field is not thermally diffuse.

To that end, we present 2-D numerical experiments of acoustic scattering on rigid inclusions randomly located either in a closed cavity or in a open medium. The wave equation is solved by a finite differences simulation (centered scheme); the boundary conditions is implemented following Collino's work [*Collino and Joly (1995)*]. Naturally, a finite-difference scheme shows numerical dispersion. However, the essential point is that the fundamental symmetries of reciprocity and time-reversal still hold in the numerical experiments.

4.3.1 The cavity equation

To begin with, let us consider two receiving points A and B and a source C placed amongst a random collection of scatterers, as represented in Fig. 4.2. The scatterers are in water; only lossless acoustic waves are considered here. At the edges of the grid, the boundary conditions may be either perfectly reflecting (Dirichlet) as in a closed cavity or absorbing (open medium). The signal transmitted by C is a pulse with a center frequency 1 MHz and a gaussian envelope ($\sigma = 0.7 \mu s$).

We will note $h_{IJ}(t)$ as the impulse response between I and J , i.e., the wave field sensed in I when a Dirac $\delta(t)$ is sent by J . If $e(t)$ is the excitation function in C , then the wave field Φ_A and Φ_B received in A and B will be respectively $e(t) \otimes h_{AC}(t)$ and $e(t) \otimes h_{BC}(t)$, \otimes representing convolution. The cross-correlation of the fields received in A and B is then

$$C_{AB}(t) = \int \Phi_A(t) \Phi_B(t + \theta) d\theta = h_{AC}(t) \otimes h_{BC}(-t) \otimes f(t) \quad (4.17)$$

with $f(t) = e(t) \otimes e(-t)$. $f(t)$ depends only on the excitation imposed at the source, whereas the information regarding the impulse response between A and B is hidden in $h_{AC}(t) \otimes h_{BC}(-t)$. Indeed, the impulse responses of a closed cavity satisfy a remarkable property, as shown by *Draeger and Fink (1999)*, which he termed the "cavity equation":

$$h_{AC}(t) \otimes h_{BC}(-t) = h_{AB}(t) \otimes h_{CC}(-t) \quad (4.18)$$

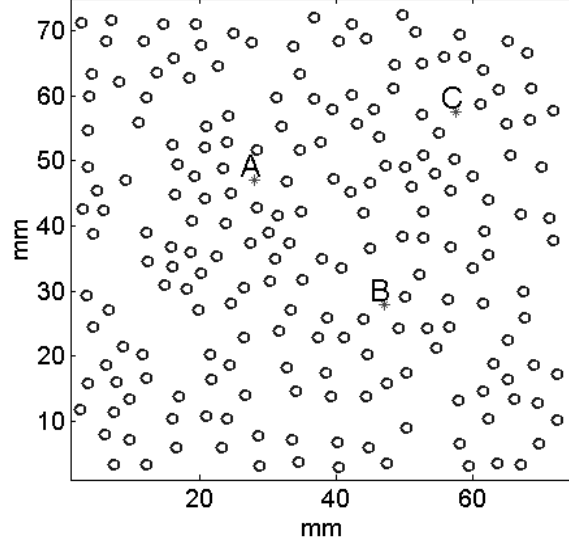


FIG. 4.2 – Two hundred perfectly rigid scatterers (diameter 2.1 mm) are randomly distributed over a $7.5 \times 7.5 \text{ cm}^2$ area. A point source is placed in C ; A and B are receiving points. The boundary conditions may be perfectly reflecting (Dirichlet) as in a closed cavity or absorbing (open medium).

For this relation to hold, the cavity must be lossless and its eigenmodes not degenerate. Note that, in practice, the correlations cannot be performed over an infinite time interval (the ring time of a cavity is infinite if it is lossless); therefore the cavity equation can be compared to experimental results if the integration time ΔT is sufficiently large compared to $1/\Delta\omega$, with $\Delta\omega$ the characteristic distance between modes, so that the modes are resolved. $1/\Delta\omega$ is sometimes referred to as the Heisenberg time, or break time. Figure 4.3 illustrates the validity of the cavity equation; here the impulse responses have been recorded during an integration time of 80 ms ($2 \cdot 10^6$ time steps), and the Heisenberg time is ≈ 5 ms. From Draeger's cavity equation, the correlation between the fields received in A and B is :

$$C_{AB}(t) = h_{AB}(t) \otimes h_{CC}(-t) \otimes f(t) \quad (4.19)$$

Therefore, similarly to Weaver's results [[Weaver and Lobkis \(2002\)](#); [Lobkis and Weaver \(2001\)](#); [Weaver and Lobkis \(2001\)](#)] the direct Green's function h_{AB} is present in the correlations of the field within a closed cavity and can be recovered from C_{AB} provided that the h_{CC} term can be properly deconvolved, at least in the frequency domain limited by the spectrum of $f(t)$.

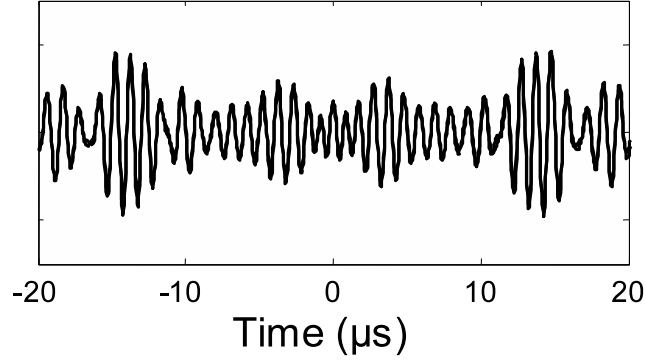


FIG. 4.3 – Comparison between $C_{AB}(t)$ (thick continuous line) and $h_{AB}(t) \otimes h_{CC}(-t) \otimes f(t)$ (dotted line). The overall correlation coefficient between the two waveforms is 98.7 %.

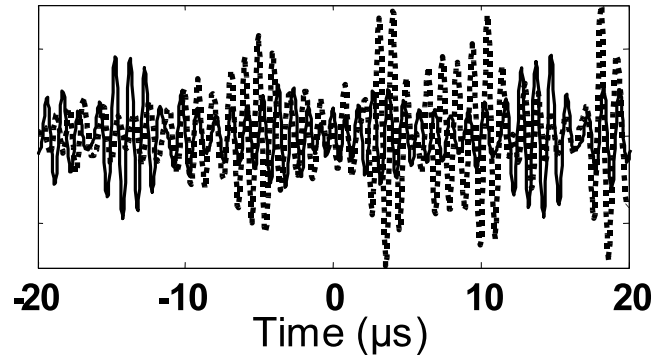


FIG. 4.4 – Comparison between $C_{AB}(t)$ (thick continuous line) and $h_{AB}(t) \otimes h_{CC}(-t) \otimes f(t)$ (dotted line) in the open scattering medium. The impulse responses were recorded during 800 μs until they became negligible. The overall correlation coefficient between the two waveforms is 0.48 %.

4.3.2 Simulation of perfect Time Reversal

Is this valid in an open medium? We have conducted the same numerical experiment, with the same distribution of scatterers, but with absorbing instead of reflecting boundary conditions. As a result, the cavity equation is no longer valid and the correlation of the scattered field C_{AB} shows no resemblance whatsoever with the Green's function (the correlation coefficient function between wave forms represented on Fig. 4.4 is less than 0.5 %).

However, a physical argument indicates that the Green's function can still be recovered from the correlations C_{AB} , even in an open medium, if several judiciously distributed sources are used instead of a single point C . To that end, we propose to analyze the experiment in terms of time-reversal symmetry. Indeed, there is a strong link between correlations of a diffuse field and time reversal [*Derode et al. (2001c)*].

Because the scatterers do not move and there is no flow within the medium, the propagation is reciprocal, i.e. $h_{IJ}(t) = h_{JI}(t)$. When we cross-correlate the impulse responses received in A and B , the result $h_{AC}(t) \otimes h_{BC}(-t)$ is equal to $h_{CB}(-t) \otimes h_{AC}(t)$. Now, imagine that we do the following time-reversal experiment : B sends a pulse, C records the impulse response $h_{CB}(t)$, time-reverses it and sends it back ; the resulting wave field observed in A would then be $h_{CB}(-t) \otimes h_{AC}(t)$, which, because of reciprocity, is exactly the cross-correlation $h_{AC}(t) \otimes h_{BC}(-t)$ of the impulse responses received in A and B when C sends a pulse. We would like the direct Green's function h_{AB} to appear in the cross-correlation. But in the most general case, $h_{CB}(-t).h_{AC}(t)$ has no reason to be equal to h_{AB} , as was shown in Fig. 4.4. Yet we can go beyond : imagine now that we use several points C to perform the time-reversal operation, and that we place them in such a way that they form a perfect time-reversal-device, with no loss of information. Following the Helmholtz-Kirchhoff theorem, such would be the case if the sources C were continuously distributed on a surface surrounding the scattering medium. Then the time-reversal operation should be perfect. During the "forward" propagation, B sends a pulse that propagates everywhere in the medium (including in A where the field received is $h_{BA}(t)$), it may be scattered many times and is eventually recorded on every point of the time-reversal device, with no loss. When the field is time-reversed, since nothing of it has been lost, it should exactly go backwards in time (and refocus on B at time $t = 0$) everywhere in the medium, which implies that the field received in A after the time-reversal is exactly $h_{BA}(-t)$, the time-reversed version of the direct Green's function. Then, once the wave has refocused on B (at time $t = 0$), it does not stop since there is no "acoustic sink" in B [*de Rosny and Fink (2002)*] : the wave diverges again from B and gives rise, at times $t > 0$ to $h_{BA}(t)$ in A .

Thus, if we use a collection of sources C arranged in such a way that they form a perfect time-reversal device, we should have

$$\sum_C h_{AC}(t) \otimes h_{CB}(-t) = h_{BA}(t) + h_{BA}(-t) \quad (4.20)$$

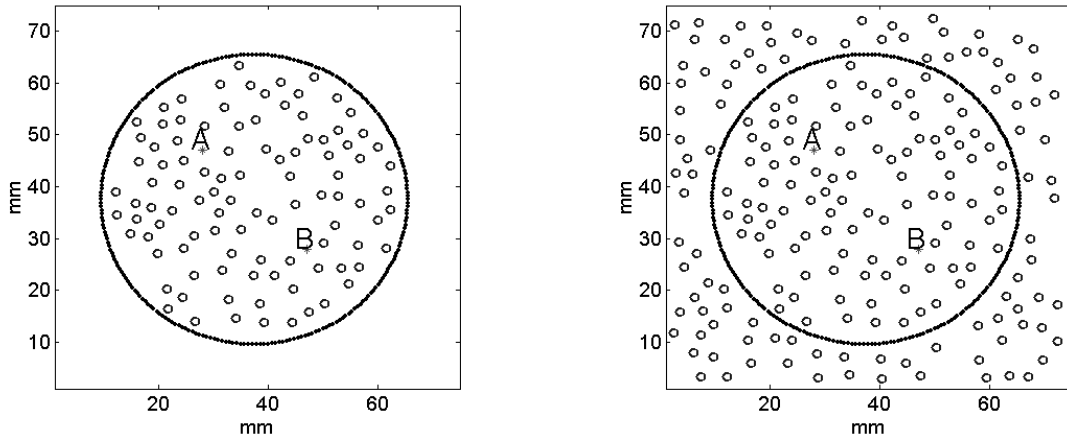


FIG. 4.5 – A and B are receiving points. Two hundred fifty source points are placed regularly around a circle with radius 18.7 mm , 100 scatterers being inside the circle. They completely surround the medium (a), or only partially (b). The boundary conditions on the edges of the grid are absorbing (open medium), in both cases.

A more detailed analysis, taking into account the monopolar or dipolar nature of the source/receivers is given by [Cassereau and Fink \(1992\)](#). Equation 4.18 implies that the impulse response $h_{BA}(t)$ can still be recovered from the correlation of a diffuse field, even in an open medium, provided that the sources C are distributed judiciously, and all the correlation functions are summed over the source positions. Unlike the case of a closed medium, no additional deconvolution by h_{CC} is needed. From this time-reversal analogy, we deduce a condition for the Green's function to emerge from cross correlations in open media : the sources C must be placed so that they form a perfect time-reversal device.

We have checked this in the numerical experiments depicted in Fig 4.5. The results are in excellent agreement with Eq. 4.20, as is shown in Fig. 4.6 : the degree of correlation between waveforms is 97.4 %. Of course, when the sources are not placed as a perfect mirror, as presented in Fig. 4.5(b), the results are less good (the degree of correlation between waveforms is 81.9 %) because one part of the waves are not recorded by the time-reversal device due to the presence of scatterers outside the sources. Yet the main features of the Green's function can still be recognized, even at late times. If the number of sources is decreased, the reconstruction of the Green's function is less satisfactory, as shown in Fig. 4.7. With only 50 sources (instead of 250 previously) regularly spaced every $\approx 5\lambda/3$ all along a circle as in Fig. 4.5(a), the correlation coefficients between waveforms is 70 %. However if the 50 sources are gathered together in a 72° angular sector (pitch $\lambda/3$), it drops to 53 %. Indeed, since the coherence length of a diffuse wave field is $\lambda/2$, it is useless to place the sources closer.

So far, we have considered that the origin of the field measured in A and B was an active

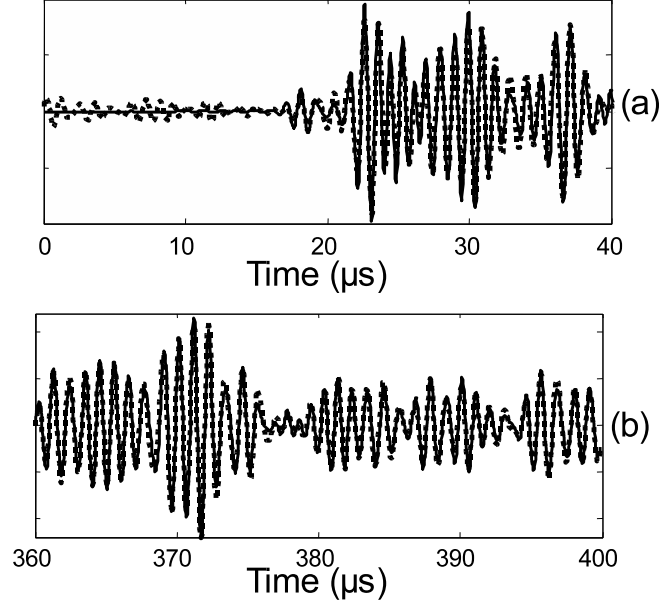


FIG. 4.6 – Comparison between $\sum_C h_{AC}(t) \otimes h_{BC}(-t) \otimes f(t)$ (dotted line) and $h_{AB}(t) \otimes f(t)$ in the open scattering medium surrounded by 250 sources C as depicted in Fig. 4.5(a), at early times (a) and in the late coda, 360 μs later (b). The overall correlation coefficient between waveforms is 97.4 %.

and coherent source transmitting a short pulse (or a collection of such sources). What if there are no such sources in the medium, but a diffuse continuous noise? The physical origin of this noise may be thermal vibrations [Weaver and Lobkis (2001)]. In seismology, noise in the seismograms comes from a variety of different sources (traffic, sea waves, weather, human activity...) continuously and (allegedly) randomly pumping energy into the earth and essentially exciting surface waves. In ocean acoustics, noise may originate from boats, surf, wind, animals *etc.* By definition, the noise sources cannot be controlled. In the light of the discussion above, in order to recover the Green's function from the cross-correlation of the noise received in A and B , the most favorable situation would be that in which noise can be considered as coming from virtual point sources C randomly distributed everywhere in the medium and continuously generating uncorrelated white noises $n_C(t)$. In that case, the cross-correlation between waveforms sensed in A and B would be

$$\sum_C \sum_{C'} h_{AC}(-t) \otimes n_C(-t) \otimes h_{C'B}(t) \otimes n_{C'}(t) \quad (4.21)$$

If the observation time ΔT is long enough compared to the correlation time of the noise, then $n_C(t) \otimes n_{C'}(-t)$ will converge to $\delta(t)\delta(CC')$. Moreover, if the virtual noise sources C are distributed everywhere in the medium (in other words, if each degree of freedom is excited randomly and independently) then the C -points would necessarily constitute a perfect time-reversal device, so Eq. 4.19 should be verified again.

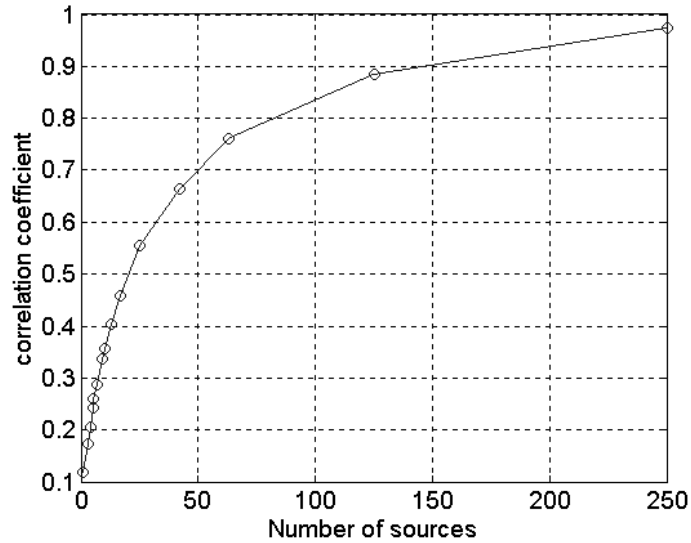


FIG. 4.7 – Correlation coefficient between $\sum_C h_{AC}(t) \otimes h_{BC}(-t) \otimes f(t)$ (dotted line) and $h_{AB}(-t) \otimes f(t)$ versus the number of sources employed.

We have carried out a numerical experiment based on this idea. Two hundred forty sources were distributed at random inside the open scattering medium shown in Fig. 4.2, and 240 uncorrelated white noises, convolved by $e(t)$, were transmitted by these sources during 40 ms. The resulting wave forms are received in A and B . Their cross-correlations $C_{AB}(t)$ is compared to the direct Green's function $h_{AB}(t) \otimes f(-t)$: the agreement is still very good (61 % correlation coefficient) even at late times.

The emergence of the Green's function in the field-field correlations in a closed cavity with discrete modes is now well established [*Weaver and Lobkis* (2002); *Lobkis and Weaver* (2001); *Weaver and Lobkis* (2001)]. In this letter, we have argued that recovering the Green's function was also possible in an open multiple scattering medium and we have proposed a criterion based on reciprocity, time-reversal symmetry and the Helmholtz-Kirchhoff theorem: if sources are placed as if they were to form a perfect time-reversal device, then the Green's function can be recovered by summing the cross correlations. This has been validated by numerical experiments. The reduction of the number of sources was also discussed and the possibility of using noise sources was illustrated.

There is still much food for thought, particularly regarding the role of scatterers in the reconstruction of the Green's function. The argument we developed here is valid for any medium (homogeneous, high-order multiple scattering, reverberant...) where reciprocity and invariance under time-reversal hold. The field does not need to be thermally diffuse for the Green's function to emerge from the correlations, as long as there are enough well-positioned sources. Another approach is to consider the scatterers as secondary sources

which are necessary to truly randomize the wave field emanating from a single original source. Correlating the late part of the coda would then permit us to reconstruct at least the early arrivals of the Green's function. Recent seismologic results support this idea [[Campillo and Paul \(2003\)](#)]. The influence of absorption is also to be investigated.

Chapitre 5

Assymétrie des corrélations, rôle des sources et de la diffusion

L'opération mathématique de corrélation

$$C_{AB}(\tau) = \int \varphi_A(t) \varphi_B(t + \tau) dt$$

est une opération symétrique en temps et en espace. Cela signifie qu'échanger les deux points de mesure A et B revient à changer τ en $-\tau$, et réciproquement. Cette opération ne donne pas un poids particulier à un côté des temps plus qu'à l'autre, il n'y a aucun opérateur qui dépende du signe de τ . La corrélation de deux enregistrements n'a en général aucune raison d'être symétrique en temps : la partie *causale* ($\tau > 0$) est sensiblement différente de la partie *acausale* ($\tau < 0$). Cependant, dans certaines conditions expérimentales, la corrélation devient symétrique. Ce chapitre propose plusieurs observations et interprétations de ce phénomène :

1. en ultrason dans l'eau et en milieu diffusant (section [5.1](#)) ;
2. en ultrason dans un milieu élastique diffusant avec une interface libre (section [5.3](#)) ;
3. en sismologie (section [5.4](#)).

5.1 Symétrie temporelle et spatiale des corrélations, interprétation Retournement Temporel (RT)

How to estimate the Green's function of a heterogeneous medium between two passive sensors ? Application to acoustic waves.

Arnaud Derode, Eric Larose, Michel Campillo, Mathias Fink.

Article publié dans *Journal of Applied Physics*

Abstract :

The exact Green's function of a heterogeneous medium can be retrieved from the cross-correlation of the fields received by two passive sensors. We propose a physical interpretation based on time-reversal symmetry. We address the issue of causality and show the role of multiple scattering for the reconstruction of the Green's function. Ultrasonic experimental results are presented to illustrate the argument. Applications to geophysics and ocean acoustics are discussed.

In most applications of wave physics (imaging, detection, communication), it is essential to know the Green's function (GF) of the medium under investigation. When possible, the GF (or impulse response) h_{AB} between two points A and B is determined by a direct pulse/echo measurement. Recent results [[Lobkis and Weaver \(2001\)](#); [Weaver and Lobkis \(2001\)](#); [Roux and Fink \(2003\)](#); [Campillo and Paul \(2003\)](#)] exploited an other idea : when A and B are both passive sensors, h_{AB} can be recovered from the cross-correlation of the fields received in A and B , the wave field being generated either by deterministic sources or by random noise. In a closed reverberant medium [[Lobkis and Weaver \(2001\)](#); [Weaver and Lobkis \(2001\)](#)] mathematical arguments were given, based on a discrete random modal expansion. An ensemble-averaged GF is fundamentally different from the actual GF of one realization of disorder. We propose a simple physical interpretation of the emergence of the exact GF in the correlations based on reciprocity, with no reference to a random modal expansion. We particularly address two issues :

1. Physically, the GF h_{AB} is causal, but the correlation between the wave fields received in A and B may be non-causal, therefore should one keep the causal part, the anti-causal part of the correlation, or both to estimate h_{AB} ?
2. In an inhomogeneous medium, what is the role of scattering in the reconstruction of the GF from field-field correlations ?

We also present experimental results to support the argument.

To begin with, let us consider two receiving points A and B and a source C . We will note $h_{IJ}(t)$ the scalar wave field sensed in I when a Dirac $\delta(t)$ is sent by J . If $e(t)$ is the excitation function in C , then the wave fields Φ_A and Φ_B received in A and B will be $e(t) \otimes h_{AC}(t)$ and $e(t) \otimes h_{BC}(t)$, \otimes representing convolution. The cross-correlation C_{AB} of

the fields received in A and B is then

$$C_{AB}(t) = \int \Phi_A(t) \Phi_B(t + \theta) d\theta \quad (5.1)$$

$$= h_{AC}(-t) \otimes h_{BC}(t) \otimes f(t) \quad (5.2)$$

with $f(t) = e(t) \otimes e(-t)$. A physical argument based on time-reversal (TR) symmetry indicates that the direct GF h_{AB} may be entirely recovered from C_{AB} .

As long as the medium does not move, the propagation is reciprocal i.e. $h_{IJ}(t) = h_{JI}(t)$. So when we cross-correlate the impulse responses received in A and B , the result $C_{AB}(t)$ is also equal to $h_{CA}(-t) \otimes h_{BC}(t)$. Now, imagine that we do a fictitious TR experiment : A sends a pulse, C records the impulse response $h_{CA}(t)$, time-reverses it and sends it back ; the resulting wave field observed in B would then be $h_{CA}(-t) \otimes h_{BC}(t)$ which, because of reciprocity, is exactly the cross-correlation $C_{AB}(t)$ of the impulse responses received in A and B when C sends a pulse. We would like the GF h_{AB} to appear in this cross-correlation. But in the most general case, C_{AB} has no reason to be equal to h_{AB} . Yet we can go beyond : imagine now that we use several points C , and that we place them in such a way that they form a perfect TR-device : such would be the case if the sources C were continuously distributed on a surface surrounding A , B and the heterogeneities of the (lossless) medium. Then a TR operation would be perfect. During the "forward" step, at time $t = 0$ A sends a pulse that propagates everywhere in the medium (including in B where the field received is $h_{AB}(t)$), may be scattered many times and is eventually recorded on every point C , with no loss of energy. After the TR, the wave should exactly go backwards : it should hit B first and refocus on A at time $t = 0$ ¹, which implies that the field received in B (at times $t < 0$) is exactly $h_{AB}(-t)$, the time-reversed version of the GF. Once the pulse has refocused on A , it does not stop [*de Rosny and Fink (2002)*] but diverges again from A and gives rise, at times $t > 0$, to $h_{AB}(t)$ in B . If there is frequency-dependent attenuation, TR invariance is broken but reciprocity still holds : a TR operation would only yield a filtered version of $h_{AB}(t)$. Thus the impulse response $h_{AB}(t)$ can be retrieved from either the causal ($t > 0$) or the anti-causal part ($t < 0$) of the sum of field-field correlations $C_{AB}(t)$, provided that the sources C are placed so that they would form a perfect TR device.

In real life, whatever the type of waves involved, this condition is hard to meet. In seismology for instance the displacement field at the earth surface is recorded by seismic stations (A, B) but the sources (C) of the earthquakes are far from being arranged as a perfect TR device, they are mostly aligned along faults. Yet the elastic GF can be partially retrieved using correlations of the late seismic codas produced by distant earthquakes [*Campillo and Paul (2003)*]. Why is this possible when the TR criterion is not fulfilled ? A laboratory experiment can help us find an answer and shed light on the role played by multiple scattering (Fig. 5.1). Piezoelectric transducers (A, B) record the wavefields generated by 21 ultrasonic sources C successively firing a broad-band pulse ($1 \mu s$, central

¹We have made the change of variable $t \rightarrow t - T$, T being the time necessary for the pulse to propagate and be entirely recorded in every point C . Hence the refocusing in A takes place at $t = 0$.

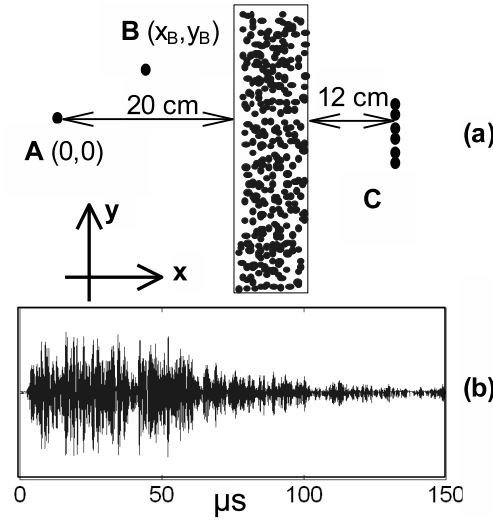


FIG. 5.1 – Experimental set-up (a). The receiver A is fixed at the origin, the experiment is done for various position of B ranging from $x_B = -50 \text{ mm}$, $y_B = -15 \text{ mm}$ to $x_B = 50 \text{ mm}$, $y_B = 15 \text{ mm}$. 21 sources C are used (size : 0.39 mm , pitch : 0.42 mm , frequency 3.1 MHz). The distance between A and C is 35 cm . (b) waveform received by A when a $1 \mu\text{s}$ pulse is sent by one of the sources.

frequency 3.1 MHz). The experiment takes place in water tank ($c = 1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$), and a scattering slab is placed between the sources and the receivers. It is made of randomly distributed steel rods ($29.5 \text{ rods}/\text{cm}^2$); the transport mean-free path [Tourin *et al.* (2000)] ℓ^* was measured to be 3 mm , while the thickness of the slab is $L = 30 \text{ mm}$, the medium is therefore highly scattering as can be seen from the waveform plotted on Fig. 5.1 (b). Frequency-dependent dissipation is negligible. The experiment is repeated for various positions of the second receiver B , each time we cross-correlate the 21 pairs of fields received in A and in B . $C_{AB}(t)$ is calculated by summing the 21 cross-correlations.

The coherent field is totally extinct in the received waveforms h_{AB} and h_{AC} . Since $L \gg \ell^*$, the correlation length of the field emerging from the slab is $\sim \lambda/2$, and from the Van Cittert-Zernike theorem the fields sensed in A and B are spatially incoherent since the transverse size of the slab is 25 cm while the distance between B and the slab varies between 15 and 25 cm .

Here, the GF between A and B is a well-defined pulse arriving at time $|AB|/c$, followed later by lower reflections on the rods. The experimental results show that the emergence of the GF from $C_{AB}(t)$ highly depends on the position of B , and on the number of sources employed. With only one source (Fig. 5.2 (a)) $C_{AB}(t)$ is too noisy to see the emergence of the GF. But at the same point B , with 21 sources (Fig. 5.2 (b)) instead of one, $C_{AB}(t)$ shows a strong peak at time $t = 33.5 \mu\text{s}$, which is exactly the travel time $|AB|/c$. Yet for

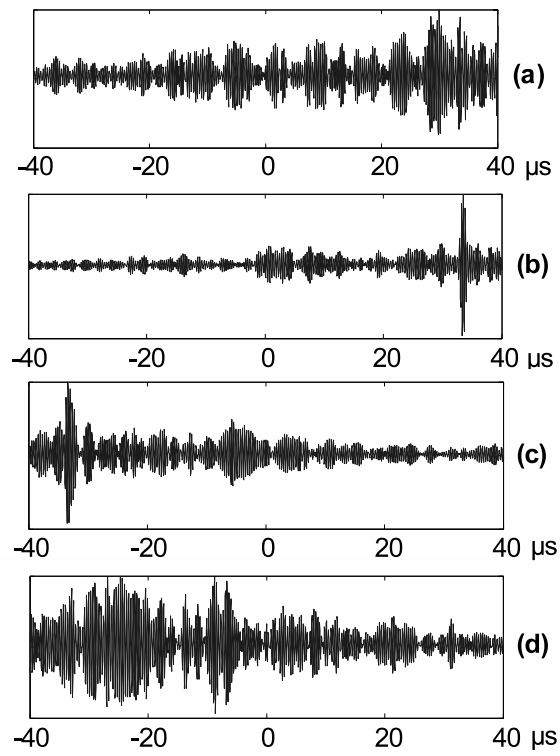


FIG. 5.2 – Cross-correlation $C_{AB}(t)$ for : (a) 1 source, $x_B = -50 \text{ mm}$, $y_B = -5 \text{ mm}$; (b) 21 sources, $x_B = -50 \text{ mm}$, $y_B = -5 \text{ mm}$; (c) 21 sources, $x_B = 50 \text{ mm}$, $y_B = -5 \text{ mm}$; (d) 21 sources, $x_B = 25 \text{ mm}$, $y_B = 15 \text{ mm}$.

a different position of B (Fig. 5.2 (c)), $C_{AB}(t)$ shows a peak at time $t = -33.35 \mu s$, the opposite of the expected travel time. And for a third position of B (Fig. 5.2 (d)), even with 21 sources, the GF does not emerge in $C_{AB}(t)$. So it appears that the GF (at least its first arrival) can indeed be recognized in the correlation $C_{AB}(t)$, but only at certain times (causal or anticausal), and for certain positions of B relatively to A . Why is that ?

The TR analogy gives the answer : for this particular set-up, in a fictitious TR experiment where A would be the source and the 21 C -points a finite-size TR device, the time-reversed pulse would hit B at times $t < 0$ only if B is between A and C (i.e. $x_B > 0$), and at times $t > 0$ only if it is behind A ($x_B < 0$). Consequently, when one cross-correlates two wavefields in order to reconstruct the GF of an unknown medium, one has to know the location of the receivers relatively to the sources and to the scatterers in order to keep only the relevant part of $C_{AB}(t)$.

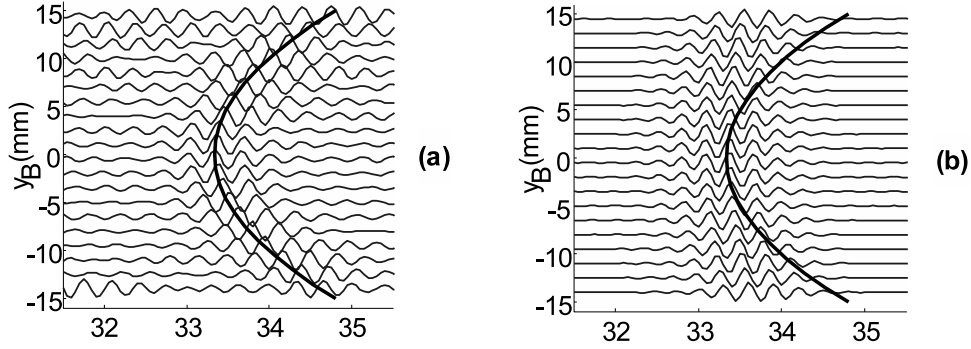


FIG. 5.3 – Cross-correlation $C_{AB}(t)$ for 21 sources, the position of B is $x_B = -50 \text{ mm}$, y_B ranging from -15 mm to 15 mm , with (a) and without (b) the multiple scattering slab. The thick line shows the theoretical arrival time of the GF. It is properly reconstructed (within $0.05 \mu s$, which is the sampling time) in an angular sector of 28° with the multiple scattering slab, versus only 6° in water.

It also appears that h_{AB} cannot be properly reconstructed for any position of B , as was shown on Fig. 5.2 (a). Fig. 5.3 compares $C_{AB}(t)$ to the theoretical travel times for 61 positions of B ($x_B = -50 \text{ mm}$, $y_B = -15 \text{ to } 15 \text{ mm}$), with and without the rods : the curvature of the GF emerges only in the former case. This emphasizes the role of multiple scattering : the region for which the arrival time is well retrieved is much smaller in a homogeneous medium (water) than through the forest of rods. This too can be interpreted via the TR analogy : a TR experiment works better (meaning that it reconstructs better the "initial scene") through a multiple scattering medium [Derode *et al.* (2001b)] than in a homogeneous medium (here the "initial scene" would be the propagation of a spherical pulse emitted by A).

In our experiment, there is no statistical average over disorder. The only average is an average over the sources, when we stack 21 field-field correlations. Also, the equipartition of energy between discrete modes cannot be attained here, since the medium is open ; besides even if the sources C were truly omnidirectional, only half of their angular spectrum would actually excite the scattering slab. This is very different from other works [*Lobbis and Weaver (2001)*]. Here we do not fulfill the equipartition condition, neither do we not fulfill the "perfect TR device" condition, but we try to come closer to it using several sources instead of one. The TR approach implies that if the sources C were completely surrounding the medium, the sum of the cross-correlations would give the exact Green's function of the medium [*Derode et al. (2003b)*], not an ensemble-averaged GF. Our experimental results show that with a limited number of sources it is possible to estimate at least the first arrival of the GF, not everywhere at every time but in a limited area whose size is larger in the presence of multiple scattering.

These results can be extrapolated to various applications of wave physics, e.g. ocean acoustics [*Roux and Fink (2003)*] or seismology. When an earthquake occurs, seismograms can show a long coda due to multiple scattering in the Earth's crust. It was recently shown [*Campillo and Paul (2003)*] that the cross-correlation of coda waves received on two seismic stations (A, B), averaged over a hundred earthquakes (i.e. sources C), exhibited a pulse arriving at the same time and with the same polarization as a direct Rayleigh wave that would travel from A to B . In future developments, since the epicenter of earthquakes can be known, it would be possible to determine whether it is the causal part, the anticausal part or both that have to be taken into account in order to have a better estimation of the GF. A more detailed publication on this subject is on hand. The prospects are wide : the idea developed here are applicable to every domain of wave physics where one can measure directly the field (amplitude and phase, not only the intensity) and perform a cross-correlation. Acoustic, elastic or even radio waves could be employed. Whatever the type of waves, the TR analogy provides an elegant way to interpret the emergence of the GF from the correlation of the fields.

5.2 Reconstruction passive d'une onde de Rayleigh, rôle de la diffusion

Nous nous sommes jusqu'à maintenant intéressés aux ondes acoustiques en milieu ouvert. Pour ce qui concerne les applications à la sismologie, d'autres ondes doivent être étudiées. la Terre est un milieu élastique, dans lequel la surface (libre) engendre quelques phénomènes physiques spécifiques. La condition de traction nulle à la surface libre rend possible l'existence d'ondes de Rayleigh et de Love : ondes se propageant quasiment à 2-D sous la surface libre, qui les piègent.

Ces ondes sont d'autant plus importantes à étudier qu'elles constituent l'essentiel du signal sismique reconstitué par la méthode des corrélations en sismologie [[Campillo and Paul \(2003\)](#); [Shapiro and Campillo \(2004\)](#); [Shapiro et al. \(2005\)](#); [Paul et al. \(2005\)](#)]. Nous proposons dans ce chapitre une expérience en ultrasons simulant la propagation des ondes dans la croûte terrestre. Sont étudiées notamment les propriétés de diffusion des ondes (ℓ^*) et le couplage entre onde de volume (P et S) et onde de surface.

Les observations sismologiques de reconstruction passive d'onde de surface sont-elles confirmées par une expérience de laboratoire dans laquelle les paramètres de propagation sont contrôlés ? Peut-on reconstruire l'onde de Rayleigh grâce aux ondes de volume en milieu ouvert ? Nous verrons qu'en l'absence de diffusion cette reconstruction (à partir d'ondes de volume) est impossible.

Expérimentalement, la génération et la détection des ondes à la surface d'un solide se fait à l'aide d'instruments laser. Ils ont l'avantage d'être bien plus précis (résolution quasi-ponctuelle) que les céramiques piézoélectriques. De plus ils sont très large-bande (en émission comme en détection) et n'interfèrent pas avec l'onde qu'ils mesurent (ils ne "touchent" pas la surface).

5.2.1 Génération et détection laser d'ondes ultrasonores

d'après [Royer and Dieulesaint \(1986\)](#) et [Royer \(1995\)](#) (Techniques de l'Ingénieur).

Principe de génération laser

Un faisceau laser pulsé, focalisé sur la surface d'un solide semi-infini, selon un point ou une ligne, agit comme une source ponctuelle ou linéique impulsionnelle qui engendre simultanément différents type d'ondes (P, S Rayleigh). La figure 5.4 représente les fronts d'onde à l'instant t après l'impact laser. Dans le cœur du matériau la perturbation mécanique est localisée sur deux arcs de cercle de rayon $v_P.t$ et $v_L.t$. Sur la surface libre en $z = 0$, la perturbation due à l'onde de Rayleigh apparaît aux points d'abscisse $x = \pm v_R.t$.

Suivant la densité de puissance, l'impact d'une impulsion lumineuse sur la surface libre d'un solide opaque engendre des ondes élastiques selon différents mécanismes qui relèvent de deux catégories : ceux qui entraînent une modification de l'état de la surface (phénomène d'ablation) et ceux qui ne le modifient pas (pression de radiation, effet thermo-élastique).

Lorsque la densité de puissance lumineuse ne donne lieu à aucune vaporisation de matière, l'effet de la dilatation locale résultant de l'échauffement (régime thermo-élastique) est prépondérant par rapport à la pression de radiation. Une partie de l'énergie est absorbée par effet Joule, l'autre est réfléchi. En raison de l'effet d'écran des électrons de conduction,

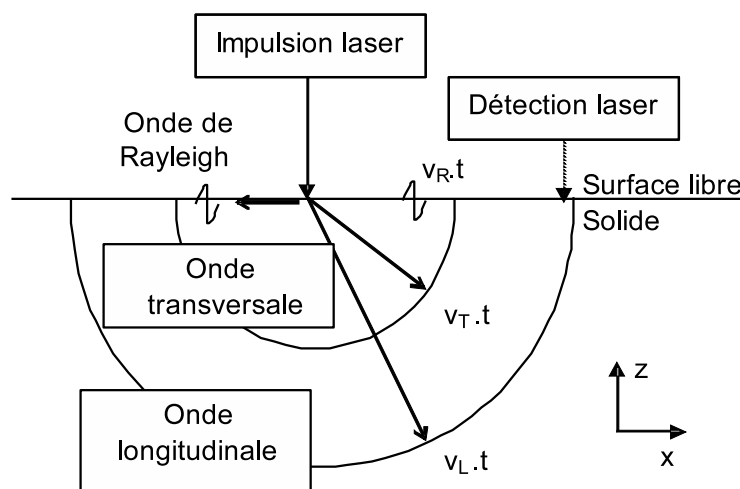


FIG. 5.4 – Schéma de principe d'une expérience de génération/détection laser d'onde ultrasonore. Dans ce cas particulier, la source et la sonde sont dirigées vers la même surface.

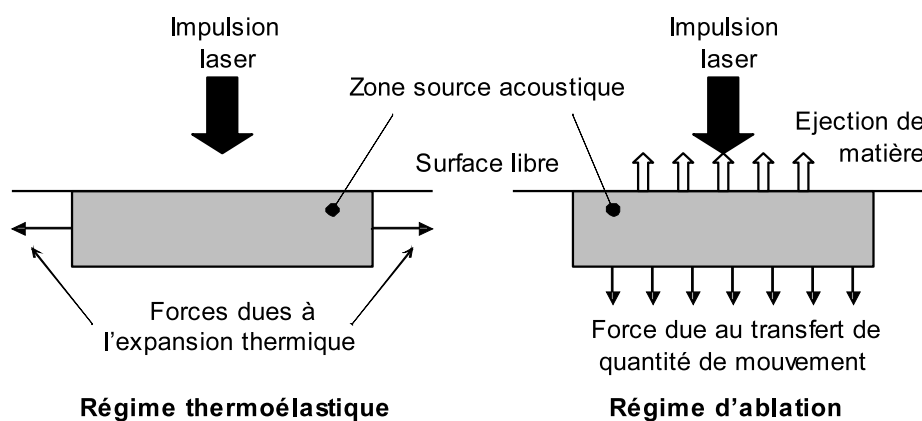


FIG. 5.5 – Mécanisme de génération d'ondes élastiques par émission d'impulsion laser. En régime thermo-élastique (faible radiation incidente), des ondes de surface sont essentiellement générées. Lorsque l'intensité lumineuse augmente, il est possible d'atteindre un régime d'ablation, où une partie de matière est vaporisée. Des ondes de volume (P et S) sont alors engendrées.

les phénomènes sont localisés très près de la surface de métal, dans l'épaisseur de peau. La dilatation thermique de surface provoque des forces essentiellement parallèles à la surface libre. Plus profond, elle génère des ondes polarisées verticalement. La combinaison des déplacements transverses et longitudinaux crée une onde de Rayleigh.

Si la densité de puissance lumineuse absorbée est suffisante ($I > 15 \text{ mW/cm}^2$ dans le cas de l'aluminium), l'impulsion incidente provoque une vaporisation de matière. Ce régime d'ablation, qui s'accompagne d'un transfert de quantité de mouvement, crée des forces essentiellement normales à la surface libre (figure 5.5) et génère donc surtout des ondes de volume. Si un film opaque est présent à la surface du matériau, les forces normales sont alors augmentées.

Détection optique de déplacements

L'objet de cette partie est de décrire deux dispositifs optiques de mesure de déplacement mécanique d'une surface. Ces dispositifs sont moins sensibles qu'un détecteur piézoélectrique mais ils présentent a priori l'avantage d'un examen local, sans contact mécanique, avec une bande passante très large.

Un faisceau lumineux de diamètre d interagit avec le déplacement de matière normal à la surface. Ce déplacement est induit par une onde acoustique de longueur d'onde λ , modifiant :

- La direction du faisceau lumineux si $d < \lambda$: il est défléchi par ondulation de la surface.
- L'intensité du faisceau lumineux si $d \gg \lambda$. Couvrant plusieurs longueurs d'onde, il est diffracté par le réseau (en réflexion) associé à l'onde élastique.
- La phase du faisceau par variation du chemin optique dû au déplacement normal de la surface.
- La fréquence du faisceau par effet Doppler.

Dans ce manuscrit, seules les sondes interférométriques sont présentées. Elles exploitent la modulation de phase ou de fréquence de l'onde lumineuse. Ces sondes mesurent tout déplacement mécanique normal de surface, quelle que soit son origine, aussi bien en régime permanent que transitoire. La phase Φ d'un faisceau lumineux (pulsation Ω , nombre d'onde $K = 2\pi/\lambda$) réfléchi, sous incidence normale, par la surface d'un objet vibrant est modulée par le déplacement $u \cos(\omega t + \phi)$ de cette surface :

$$\Delta\Phi = 2Ku \cos(\omega t + \phi) \quad (5.3)$$

Comme les détecteurs optiques ne sont sensibles qu'à l'intensité lumineuse, pour être exploitable, cette modulation de phase doit, soit être convertie en modulation d'intensité par un interféromètre homodyne (du type Michelson par exemple), soit transposée dans le

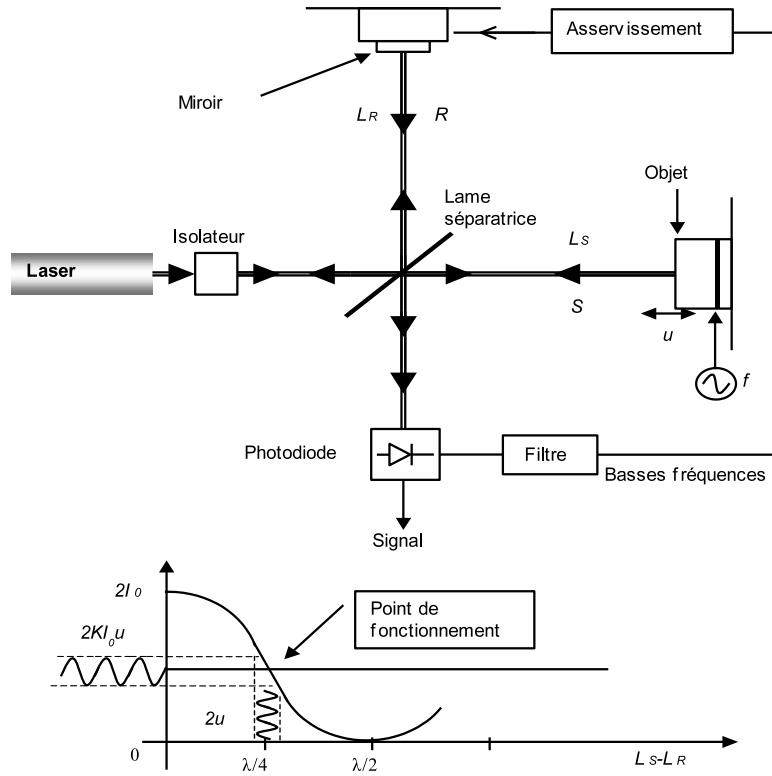


FIG. 5.6 – Interféromètre de Michelson. Il est stabilisé (par le biais d'un asservissement) pour rester autour du point de fonctionnement où l'intensité reçue par la photodiode est proportionnelle à la différence de chemin optique $L_S - L_R$.

domaine des radiofréquences à l'aide d'un interféromètre hétérodyne. Examinons successivement ces 2 méthodes.

1) Sonde homodyne

La première méthode consiste à mélanger un faisceau sonde S, réfléchi par l'objet, avec un faisceau de référence R, issu de la même source (voir Figure 5.6). Soient E_S et E_R les champs électriques correspondants :

$$E_S = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\Omega t + \Delta\Phi + \Phi_S} \quad (5.4)$$

$$E_R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\Omega t + \Phi_R} \quad (5.5)$$

Le photodétecteur, de facteur de réponse s (mA/mW) recevant les deux faisceaux, supposés de même intensité, fournit un courant

$$I = s(E_S + E_R)(E_S + E_R)^*$$

(l'exposant * correspond à la conjugaison complexe) comprenant une partie continue $I_0 = s|E_0|^2$ et une partie alternative $i_S(t)$ qui contient la fréquence de l'onde acoustique :

$$I = I_0 + I_0 \cos(2Ku \cos(\omega t + \phi) + \Phi_S - \Phi_R) \quad (5.6)$$

La configuration optique la plus courante est semblable à celle d'un interféromètre de Michelson (figure 5.6) : le faisceau laser de puissance P_L est divisé en 2 parties égales qui se réfléchissent sur l'objet (faisceau sonde S) et sur le miroir (faisceau de référence R) et se mélangent sur la photodiode. Un isolateur empêche la partie du faisceau qui revient de pénétrer dans la cavité et d'y engendrer des instabilités. Pour réduire l'effet des fluctuations de phase $\Phi_S - \Phi_R$, qui doivent être petites devant le terme Ku (rappelons que $Ku \approx 10^{-3}$ pour $u = 0,1 \text{ nm}$), le miroir renvoyant le faisceau de référence est déplacé de façon à maintenir constante la différence de marche des faisceaux lumineux (interféromètres de Michelson stabilisé).

L'intensité de photocourant dépend sinusoidalement, avec une longueur d'onde Λ , de la différence $L_S - L_R$ des chemins optiques. La sensibilité est maximale pour

$$L_S - L_R = (n \pm \frac{1}{4})\Lambda \Rightarrow \Phi_S - \Phi_R = \pm \frac{\pi}{2}$$

La position du miroir de référence est asservie de façon à maintenir le point de fonctionnement dans cette position de quadrature de phase, indépendamment des variations aléatoires des chemins optiques. Le miroir est porté par une cale piézoélectrique commandée par la partie basse fréquence ($f < 1 \text{ kHz}$) du signal détecté qui contient l'essentiel du spectre des perturbations d'origine thermique et mécanique. Notons que la limitation de la dynamique de l'asservissement impose des réglages périodiques.

En ce point de fonctionnement en quadrature de phase et lorsque les déplacements sont petits ($Ku \ll 1$), l'intensité du photocourant est :

$$I = I_0 + 2KuI_0 \cos(\omega t + \phi) = I_0 + i_S(t)$$

puissance lumineuse réfléchi par la surface et de toute procédure de calibration. Pour un laser He-Ne : $u(nm) \approx 100/R$

La configuration classique présente plusieurs inconvénients. Les faisceaux sonde et référence ne sont pas perpendiculaires. Ils sortent du modulateur séparés par un angle de diffraction θ petit ($f = 70 \text{ MHz} \Rightarrow 10 \text{ mrad}$) : les éléments (laser et photodétecteur d'un côté, miroir et échantillon de l'autre) sont donc disposés à distance relativement grande ($> 50 \text{ cm}$) du modulateur. D'autre part, les faisceaux traversent deux fois ce modulateur, l'un d'entre eux revient vers la cavité laser. Il engendre des instabilités qui s'ajoutent aux fluctuations des chemins optiques.

Une structure du type Mach-Zehnder telle que celle de la figure 5.7 est préférable. Le faisceau source, polarisé horizontalement \rightarrow , est divisé par le cube séparateur A en un faisceau de référence (R) et un faisceau sonde (S). Le premier est dirigé, par le prisme, vers la photodiode. Le deuxième dont la fréquence est décalée de f_B (70 MHz) par le modulateur acousto-optique est réfléchi par l'échantillon qui vibre à la fréquence f . Ayant traversé deux fois la lame quart d'onde, il revient polarisé verticalement \times pour être réfléchi, à 90° , par le cube séparateur B, vers la photodiode. Les faisceaux R et S dont les fréquences sont respectivement f_L et $f_L + f_B$ traversent un analyseur, orienté à 45° de leur polarisation respective, et interfèrent sur la photodiode. Celle-ci délivre un courant à la fréquence f_B dont la phase est modulée par la vibration à la fréquence f de la surface de l'échantillon.

La lentille qui focalise le faisceau sonde sur l'objet améliore la résolution spatiale, augmente la quantité de lumière collectée dans le cas d'une surface diffusante et rend la sonde moins sensible à l'inclinaison de l'échantillon quand on le déplace. Le décalage par rapport à l'axe des deux cubes élimine les signaux parasites qui proviennent des réflexions des faisceaux S et R (aux points a et b) sur l'interface du cube séparateur B. Le réglage de cette sonde est rapide (quelques minutes) car le modulateur n'est traversé qu'une fois et seulement par le faisceau sonde et les deux faisceaux sont parallèles ou perpendiculaires. Comme la partie optique est compacte (sa longueur est inférieure à 40 cm , laser inclus), son fonctionnement est stable.

La formule 5.2.1 indique que les fluctuations aléatoires de phase $\Phi_S - \Phi_R$ affectent de la même manière la raie centrale du spectre et les raies latérales. Elles sont, en principe, éliminées par détection cohérente qui effectue la différence des fréquences de la raie centrale et d'une des raies latérales. Un traitement large bande passante convenant à la détection de déplacement en régime transitoire est illustré par la figure 5.8.

Le signal qui subsiste après élimination de la modulation de phase acoustique par un filtre à bande passante étroite, centré sur la fréquence f_0 , est déphasé de $\pi/2$:

$$i_F(t) \propto \cos(\omega_0 t + \pi/2 + \Phi_S - \Phi_R)$$

Le signal résultant du mélange avec le photocourant $i_S(t)$ est, après élimination par un filtre passe-bas du terme de pulsation $2\omega_0$, proportionnel au déplacement mécanique si

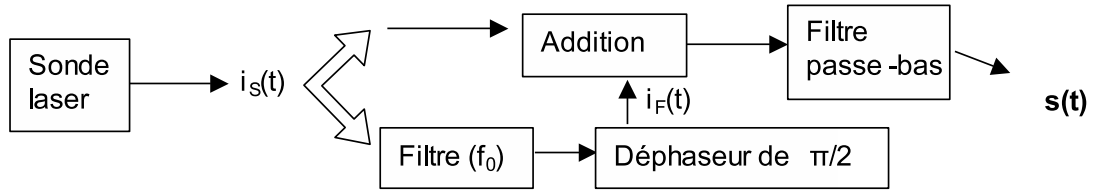


FIG. 5.8 – Traitement électronique du signal

$Ku \ll 1$:

$$s(t) \propto \sin[2Kucos(\omega t + \phi)] \approx 2Kucos(\omega t + \phi) \quad (5.7)$$

5.2.2 Mise au point d'un modèle de croûte terrestre

Géométrie de l'expérience

L'objectif de l'expérience est de simuler l'arrivée d'onde de volume (P,S) dans la croûte terrestre. La croûte est reproduite à petite échelle par une tranche d'aluminium de 25 mm d'épaisseur. La surface libre supérieure correspond à la surface libre terrestre. C'est de ce côté que nous positionnons la sonde laser. Elle va donc enregistrer les vibrations verticales de la surface. De l'autre côté nous plaçons la source laser, qui va fonctionner en régime d'ablation. Nous émettons donc sur la surface inférieure de la plaque des ondes de Rayleigh et de volume, ces dernières pouvant éventuellement être guidées dans la plaque comme peuvent l'être les ondes sismiques dans la croûte de la Terre.

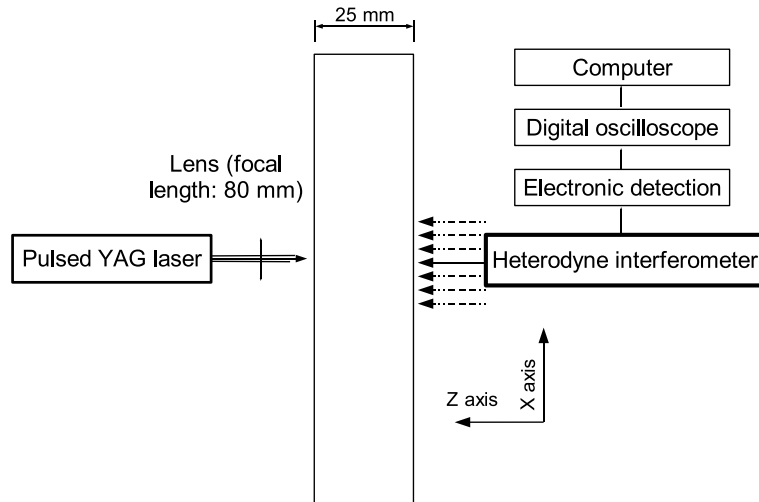


FIG. 5.9 – Géométrie de l'expérience de génération/détection laser d'onde ultrasonore, en transmission à travers une plaque d'aluminium.

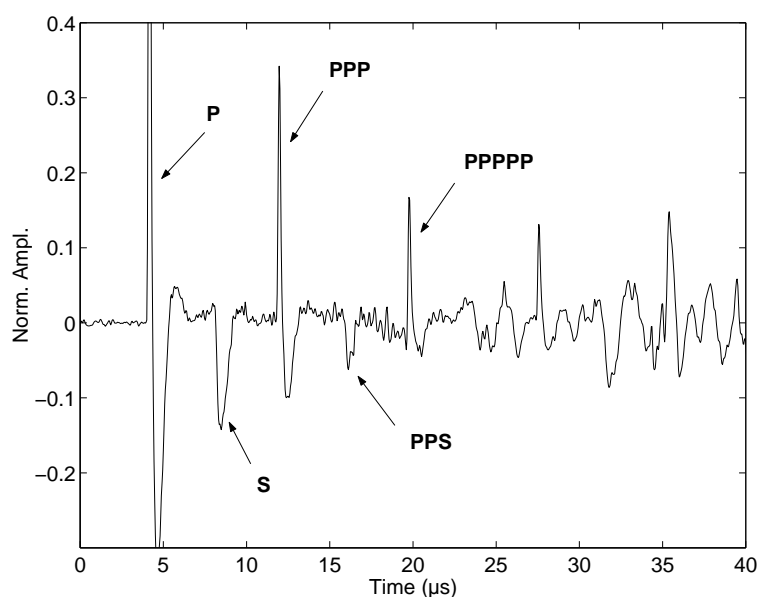


FIG. 5.10 – Signal détecté à la surface supérieure de la plaque d'aluminium lorsqu'une impulsion laser est émise sur la face inférieure. Le signal est filtré au dessus de 0.8 MHz . Les impulsions P et S correspondent à l'arrivée de l'onde de compression et de cisaillement. L'arrivée P^3 (resp. P^5) est une onde P réfléchiée deux fois (resp. 4 fois) dans la cavité, l'onde PPS arrive à un temps qui correspond à un aller-retour en P puis une conversion en S. Au delà de $20\text{ }\mu\text{s}$, les arrivées multiples commencent à se mélanger (se recouvrir en temps) et ne sont plus identifiables. C'est le début de la transmission vers le régime d'équipartition des ondes diffuses.

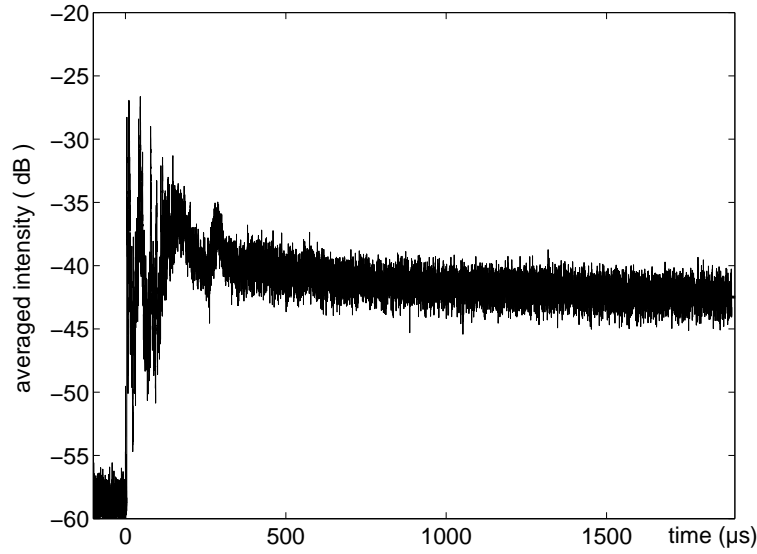


FIG. 5.11 – Intensité du signal ultrasonore obtenu en transmission à travers une plaque de Dural de dimension $25 \times 100 \times 400 \text{ mm}$. Au bout de $500 \mu\text{s}$, l'ensemble de la cavité est excitée de façon homogène : régime d'équipartition. À partir de ce moment là, la décroissance de l'intensité est liée à l'absorption intrinsèque de l'aluminium, ainsi qu'aux fuites résiduelles des ondes hors de la cavité (couplage avec le support par exemple). Cela représente une atténuation de 1 dB/ms (très faible), soit un temps caractéristique (exponentiel) de décroissance $\tau_{abs} = 23\,000 \mu\text{s}$.

Mise au point de bords absorbants

La croûte terrestre peut-être vue comme une plaque infinie dans la direction x et y (horizontale) par rapport à son épaisseur en z (10 à 50 km). Cette caractéristique est impossible à reproduire en laboratoire (espace limité). Nous proposons de simuler en milieu ouvert en x et y en disposant autour de l'échantillon d'aluminium une couche épaisse de mastic à l'huile de lin (mastic de vitrier). Elle est relativement dense (densité > 1) et semble bien adaptée en impédance à l'aluminium. En l'absence de cette pâte, le temps d'absorption τ_{abs} (lié au facteur d'atténuation $e^{-t/\tau_{abs}}$) vaut $23\,000 \mu\text{s}$ (fig. 5.11). En présence de cette pâte, il tombe à quelques centaines de μs (fig. 5.12).

5.3 Passive Retrieval of Rayleigh Waves in Disordered Elastic Media

E. Larose, A. Derode, D. Clorennec, L. Margerin, M. Campillo.
Article sous presse dans *Phys. Rev. E*.

Abstract :

When averaged over sources or disorder, cross-correlation of diffuse fields yield

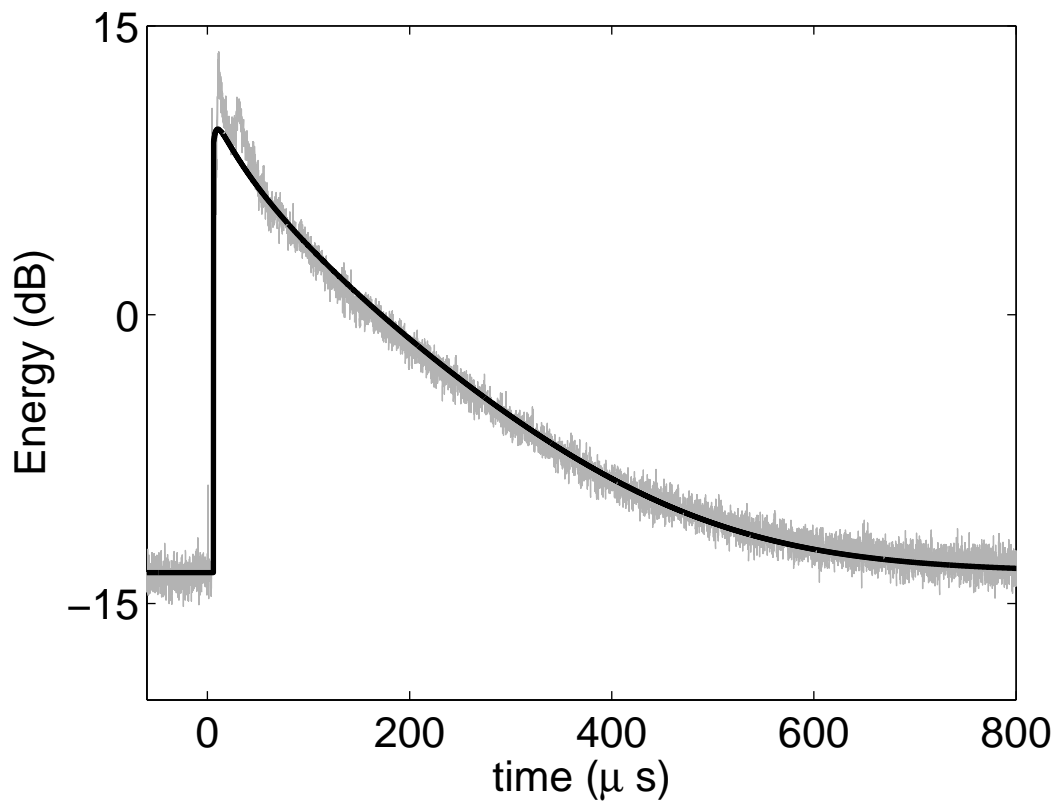


FIG. 5.12 – Intensité moyenne obtenue dans la cavité en aluminium lorsqu'elle est entourée d'une pâte absorbante. Le temps de décroissance de l'intensité tombe à quelques centaines de μs , soit 100 fois moins qu'en l'absence de bords absorbants. La courbe en gras correspond à un fit théorique qui est développé plus loin. Les bords absorbants entourent la cavité pour simuler une plaque d'aluminium infinie.

the Green's function between two passive sensors. This technique is applied to elastic ultrasonic waves in an open scattering slab mimicking seismic waves in the Earth's crust. It appears that the Rayleigh wave reconstruction depends on the scattering properties of the elastic slab. Special attention is paid to the specific role of bulk to Rayleigh wave coupling, which may result in unexpected phenomena like a persistent time-asymmetry in the diffuse regime.

5.3.1 Introduction

Whatever the type of waves involved, knowing the Green's function of an heterogeneous medium is the key to many essential applications like imaging, communication or detection. In the last twenty years or so, mesoscopic physics has intensely studied wave phenomena in strongly disordered media : weak and strong localization, radiative transfer and diffusion approximation etc. [[van Rossum and Nieuwenhuizen \(1999\)](#)]. But the *exact* Green's function of a complex medium is not easily tractable, and usually theoreticians study ensemble-averaged quantities like statistical correlations of intensities or wave fields. Moreover, from an experimental point of view, it is not always possible to measure the Green's functions of a complex medium because it requires controllable arrays of sources and receivers that do not perturb the medium. In the context of laboratory ultrasound, this is (nearly) routine ; but in other fields of wave physics like seismology, distant sources are not controllable. In that respect, a good deal of publications followed recent works by Weaver. He proposed to cross-correlate the diffuse wave fields obtained at two passive sensors and showed it yields the elastic Green's function between the two receivers, as if one of the receivers was a source [[Weaver and Lobkis \(2001\)](#); [Lobkis and Weaver \(2001\)](#)]. That correlations performed on passive sensors should yield the wave travel times is not that new. This principle was applied to helioseismology in the 90's where it provided tomographic images of the Sun's interior [[Duvall et al. \(1993\)](#); [Rickett and Claerbout \(2000\)](#)]. Beyond travel time reconstruction, Weaver's experimental retrieval of exact Green's functions was a real breakthrough.

Weaver's work has been followed by different contributions. Some theoretical works are based on the ergodic approximation where time and ensemble average coincide. This approach is very useful for estimating the role of scattering in the correlation asymmetry [[van Tiggelen \(2003\)](#); [Malcolm et al. \(2004\)](#)]. When several sources are available, another possibility is to average correlations over sources without moving the receivers. This was done in underwater acoustics [[Roux et al. \(2004\)](#)]. [Sabra et al. \(2005b\)](#) showed the possibility of recovering the entire Green's function of the sea waveguide (especially the late contributions of multiples) and proposed a model for estimating the signal-to-noise ratio of the correlations. [Derode et al. \(2003b\)](#) proposed to interpret the Green's function reconstruction in terms of a Time-Reversal analogy, and showed that all the benefits of time-reversal devices in multiple scattering media could be fruitfully applied to "passive imaging" from correlations [[Derode et al. \(2003a\)](#); [Larose et al. \(2004a\)](#)]. This idea is based on the mathematical principle of the representation theorem [[Aki and Richards \(2002\)](#)],

equivalently referred to as the Helmholtz-Kirchhoff theorem [*Cassereau and Fink (1992)*] : if a perfect series of receivers has been sensing the wave field for ages, then one can mathematically have access to the wave field anytime and anywhere in the area enclosed by the sensors. Very recently, this principle was fully developed and applied to elastic waves in open media by *Wapenaar (2004)*.

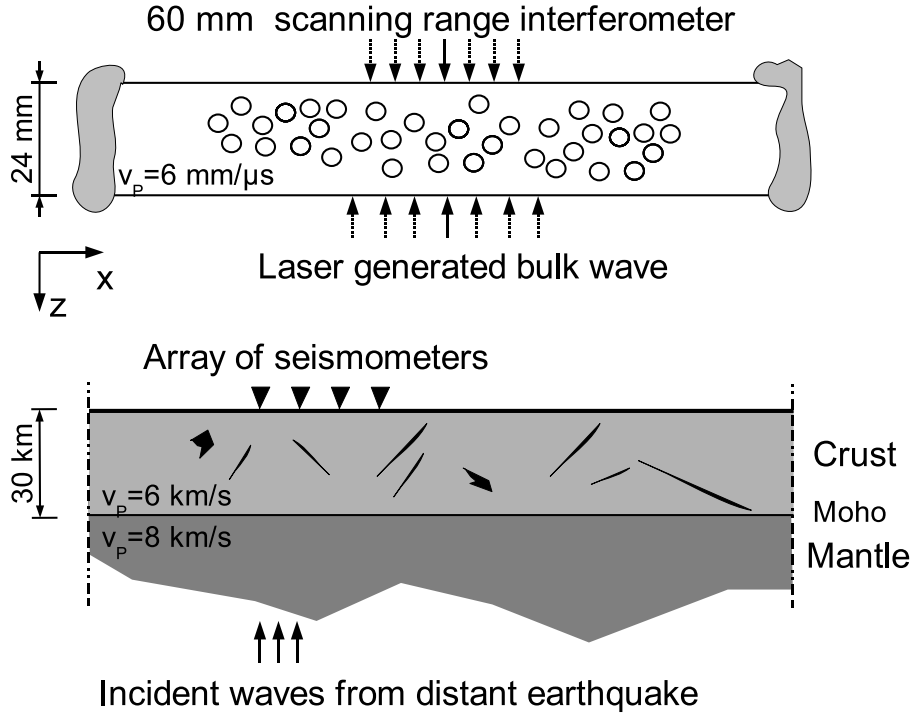


FIG. 5.13 – $10^6 \rightarrow 1$ scaled analogy between the Earth crust and our ultrasonic experiment. In the crust, the scattering mean free path was estimated in Mexico [*Margerin et al. (1998)*] at 1 Hz : $\ell^* = 30$ km. In the aluminum waveguide we numerically found $\ell^* = 5.5$ mm at 1 MHz.

From the very start of Weaver's work, the correlation principle was successfully applied to seismic waves [*Campillo and Paul (2003)*; *Shapiro and Campillo (2004)*; *Shapiro et al. (2005)*]. The most energetic part of the Green's function between two seismic stations (Rayleigh and Love wave trains) was retrieved from passive correlations of either coda waves or records of seismic noise. As we mentioned earlier, obtaining impulse responses without a controllable source is of high interest in seismology since it gives the possibility of simulating very energetic and punctual earthquakes everywhere around the Earth, and do imaging without a controllable source ("passive imaging"). Results are quite encouraging although several theoretical problems remain unsolved. They concern issues very specific to the Earth. In particular elastic sources (earthquakes) are naturally never arranged in such a way that they would perfectly surround a couple of seismic stations. In addition, for distant earthquakes, the propagation directions of incident bulk waves are mostly vertical,

and in a vertically layered medium they would not couple with Rayleigh waves. So, why do we observe a Rayleigh wave train in the correlation of waves generated by bulk sources? The Green's Function retrieval is linked to equipartition, which is due to wave scattering. So, what is the influence of scattering within the Earth crust in that process?

Here we present experimental results obtained in the lab with laser-induced and laser-detected ultrasonic waves propagating in a heterogeneous slab mimicking the Earth crust. Lots of previous experimental articles applied the "passive imaging" technique to acoustic waves. Here we propose to investigate the emergence of the Green's function in the correlations of elastic waves propagating in a solid heterogeneous medium with a free surface. Because field experiments are tedious and natural environment are mostly unknown (especially the scattering properties), we propose to build an Earth crust model at the scale $1/10^{-6}$ (presented in fig. 5.13). Waves will be sensed at ultrasonic frequencies at the free-surface of an elastic open medium. In our experiment surface waves are not initially excited. This is different from the work of *Malcolm et al. (2004)*, where ultrasonic Rayleigh waves were generated on the same surface they were measured. In addition they used a finite cylindrical medium with possibly round trip wave trains whereas our experiment is conducted in a nearly open medium. In our configuration, we would not expect the Rayleigh wave to be reconstructed in the correlation, except if scattering is present and mode conversion between Rayleigh and bulk waves occurs. To verify this assumption and study the role of mode conversion, we used two samples of identical dimensions, one with scatterers the other without.

The next section describes the experimental setup and the propagation medium. Section III presents a short theoretical study of the scattering properties (scattering-cross sections σ of a single scatterer and the transport mean-free paths ℓ_P^* and ℓ_S^* of the heterogeneous sample). This study is supported by experimental measurements. In section IV, the passive imaging technique is applied to records acquired at the free surface. Time and frequency analysis are proposed, and a brief discussion on the time-symmetry of the correlations concludes the article.

5.3.2 Experimental setup

The experimental setup is depicted in fig. 5.14. It was designed to mimic the propagation and scattering of elastic waves through the Earth crust, at ultrasonic frequencies (0.8-3.2 MHz). A duraluminum slab whose dimensions are roughly 10^{-6} those of the crust was used. Fifty-four cylindrical holes (radius $a = 2$ mm) were drilled at random along direction y so that the waves propagating through the slab could undergo multiple scattering. The 2-D spatial Fourier transform of the hole positions was calculated and is almost perfectly flat in the range of ultrasonic wavelengths involved in the experiment, which confirms the absence of spatial correlation between the holes. The density of scatterers was $n = 0.0105 \text{ mm}^{-2}$. Ideally, the slab should have had infinite dimensions along x and y . To approach this condition, we stuck a thick layer of dense plasticine on the lateral

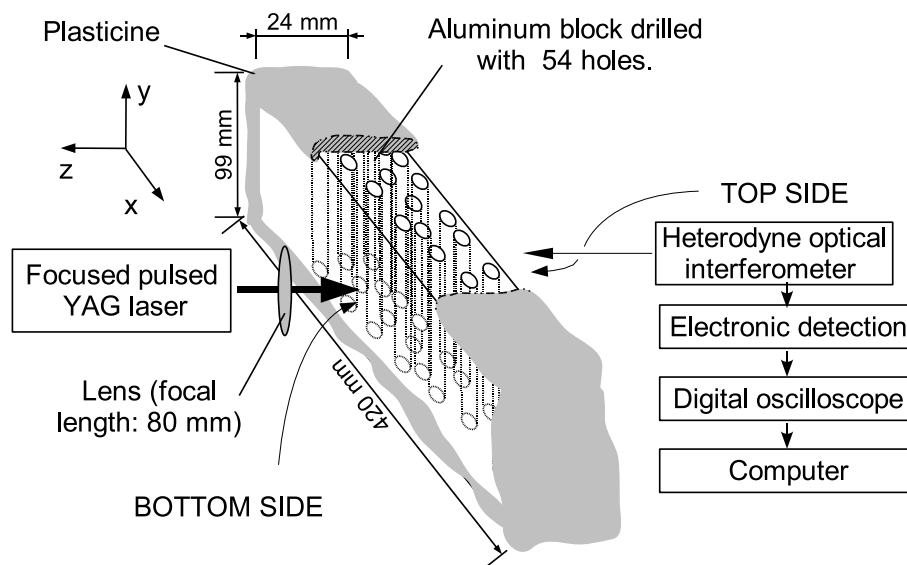


FIG. 5.14 – Experimental setup : The propagation medium is an aluminum block drilled with 54 vertical cylindrical holes (diameter : 4 mm). A Q-switched Nd :YAG laser shoots on the bottom side 100 pulses (24 ns duration and 280 MW/cm^2 intensity each). On the top side a heterodyne interferometer senses the vertical displacement of the aluminum/air interface. This measure is repeated at 7 different locations ($X_0 = 0 \text{ mm} \rightarrow X_6 = 60 \text{ mm}$) for each source position. Plasticine was stuck on the edges and the four lateral sides to mimic absorbing boundary conditions and avoid the generation of Rayleigh waves by mode conversion at the edges.

sides and edges of the duraluminum sample. It was aimed at creating absorbing boundary conditions and avoiding the generation of Rayleigh waves by mode conversion at the edges. The energy decay time τ_{abs} was initially found to be 23,000 μs . With the plasticine it decreased to 120 μs (see next section for a detailed discussion on the absorption time). We therefore simulated an open slab in the x and y direction with a free surface at the top. Rigorously, the earth crust is a waveguide that partially leaks energy through the Moho to the underlying mantle. To perfectly match this feature we should have placed a infinite medium with a different impedance at the bottom side of the aluminum slab. Yet we think that our results and conclusions do not suffer too much from this omission : the central point of our set-up is to mimic an elastic and scattering medium, infinite in the horizontal directions with a free surface on the top.

The source we employed to simulate earthquakes was a Q-switched Nd :YAG laser that shot 24 ns pulses at the bottom side of the slab (each pulse energy : 9 mJ). Two regimes of elastic wave generation are possible with a laser source [*Scruby and Drain (1990)*]. When the surfacic intensity of the pulse is weak ($< 15 \text{ MW/cm}^2$), the surface is locally heated up and its dilation creates Rayleigh waves (thermoelastic regime). At higher intensity, the laser evaporates part of the metal. In this ablation regime, both Rayleigh and bulk waves are generated. Theoretical radiation patterns are displayed on fig. 5.15 for compressional and shear waves. Rigorously, such a source is not truly reproducible since the laser impact can damage the surface. To make the experiment as reproducible as possible while staying in the ablation regime, the shot intensity was no more than 280 MW/cm^2 . A 1 ms record was acquired 100 times without any observable change. In the following experiments, for a satisfactory signal to noise ratio, each impulse response was averaged over 100 consecutive shots.

As to the detection of the free surface motion, it was achieved with a contactless and quasi-punctual device : a heterodyne optical interferometer developed by *Royer and Dieulesaint (1986)* which has the advantage of a very broadband response (20 kHz-45 MHz) and a sensitivity of $10^{-4} \text{ \AA}/\sqrt{\text{Hz}}$. It was mounted perpendicularly to the slab and then provided us with the absolute vertical component of the free surface displacement (top side), with a fine spatial resolution ; the size of the laser spot was $\sim 100 \mu\text{m}$ whereas the typical elastic wavelengths here are ranging between 1 and 10 mm. This is similar to seismology, where sensors are nearly punctual compared to the wavelengths considered (several kilometers at 1 Hz). However seismic sensors usually provide time records of the three components of the displacement field. Here the interferometer only measured the vertical movements of the free surface.

In an elastic body, three different kinds of wave polarization are possible. Compressional (or longitudinal) waves are analogous to acoustic waves in fluids (velocity $v_P = 6.32 \text{ mm}/\mu s$ in duraluminum). Shear (transverse) waves have two possible polarizations (velocity $v_S = 3.13 \text{ mm}/\mu s$) : one we call SV (Vertical) in the x - z plane (see fig. 5.13) and one SH (Horizontal) in the x - y plane. SH waves have no contribution in the z direction and therefore

will not be detected by the interferometer. In addition to bulk waves, surface waves exist but here only Rayleigh waves ($v_R = 2.9 \text{ mm}/\mu\text{s}$) will be taken into account since the others cannot be detected (no vertical displacement). The shortest wavelength in the aluminium slab is 0.9 mm, which is much greater than the duraluminum alloy grain size. Since the orientation of the grains is random, we consider the alloy to be isotropic for elastic waves in the frequency band of interest. Scattering at the grain edge is presumably also negligible compared to scattering by the void cylinders.

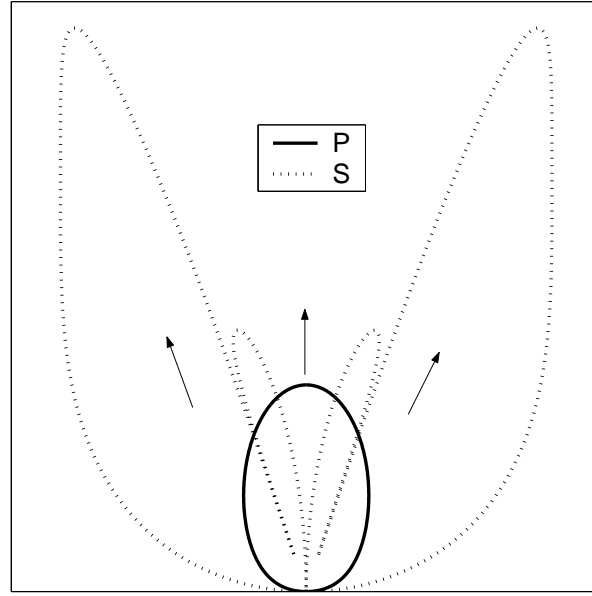


FIG. 5.15 – Directivity pattern (linear scale) of the laser source. Rayleigh waves are not taken into account since they are absorbed at the edges. The experiments were carried out in the ablation regime, where bulk waves are much more energetic than in the thermoelastic regime. Compressional wave directivity : thick line, shear wave directivity : dotted line.

The overall translational symmetry along y of both the free surface and the cylindrical scatterers avoid any coupling between SH mode and the other SV and P modes. Therefore SH waves will not be considered in our article and SV waves will be referred to as S (shear) waves. The wave propagation in our experiment will be treated as 2-dimensional (and quasi 1-D for the surface Rayleigh waves). Waves initially propagating in the y direction are rapidly absorbed by the plasticine and lost.

The laser source and the laser interferometer could be translated independently : 35 sources and 7 sensing positions were used during the experiment, providing us with a set of 35×7 impulse responses. A typical waveform is depicted on fig. 5.16. Around 1 MHz it is lasting nearly $800 \mu\text{s}$, and shows a long diffusive decay comparable to the seismic coda. Due to the strong scattering on the cylindrical cavities, no top-bottom reflection was observed

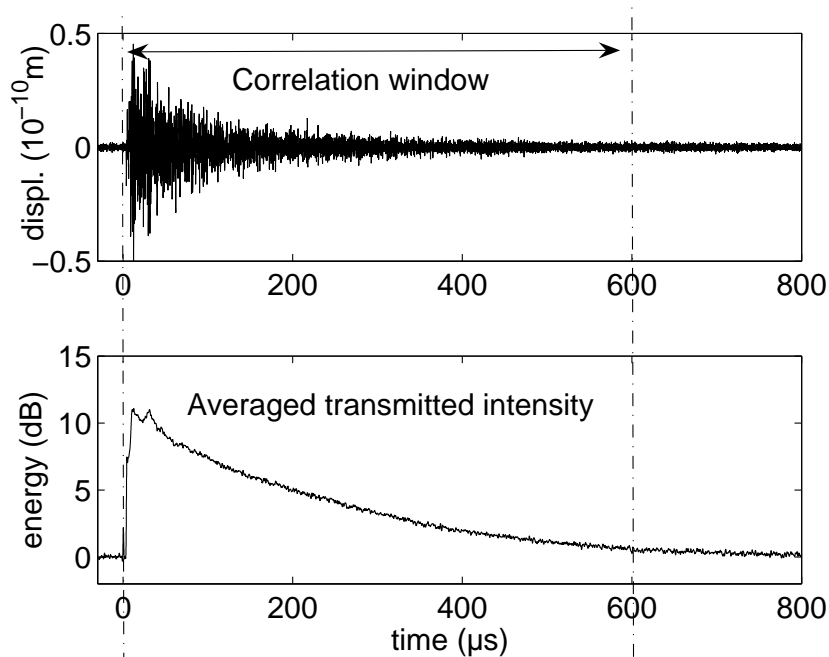


FIG. 5.16 – Top : typical waveform obtained through the scattering slab around 1 MHz. The sensitivity of the heterodyne interferometer is $10^{-4} \text{\AA} / \sqrt{Hz}$ corresponding the optimal level of optical reflection on the sensed surface. After averaging over 100 records we reached the precision of 10^{-2}\AA . Bottom : intensity averaged over several source/sensor positions.

in the data. This confirms the high diffusive nature of the propagation in the scattering slab. The relevant scattering properties are discussed and evaluated in the next section.

5.3.3 Wave scattering and transport properties

Scattering cross section of an empty cylinder

In order to evaluate the amount of scattering and mode conversion, we calculated the differential cross-section $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}$ and the total scattering cross-section σ of a cylindrical void in a elastic medium excited by a compressional or shear plane wave. A brief description of the calculation is given in the Appendix. For a detailed derivation we refer to [Pao and Mow (1995); Faran (1951); Liu et al. (2000)]. The differential scattering cross-section gives the angular distribution of the scattered surfacic intensity, normalized by the incident surfacic intensity. The total elastic cross-section is $\sigma = \int \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} d\theta$. In 2-D it has the dimensions of a length. It corresponds to the scattering strength of an object at a given frequency. In an elastic medium, mode conversion can occur and different cross-sections must be considered. In the case of an incident compressional wave, they are noted σ_{PP} , σ_{PS} and $\sigma_P = \sigma_{PP} + \sigma_{PS}$, respectively for the P to P, P to S and total P elastic cross-sections. We also calculated the elastic cross-sections for an incident shear wave (S), σ_{SP} , σ_{SS} and $\sigma_S = \sigma_{SP} + \sigma_{SS}$.

The differential cross-sections plotted on fig. 5.17 have been computed at 1.2 MHz and 2.4 MHz frequencies. The elastic scattering sections are plotted in fig. 5.18 for frequencies ranging from 0.1 MHz to 200 MHz. In average in the frequency band of interest (0.8-3.2 MHz), we obtained $\sigma_P = 9.2$ mm. This value is comparable to measurements by White (1958). The same calculations were conducted for an incident shear wave, we found an average of $\sigma_S = 12$ mm in the 0.8-3.2 MHz frequency band.

Transport properties

When the elastic wave propagates through the aluminum slab drilled with holes, it undergoes multiple scattering. Let $\varphi(t)$ (resp. $\varphi_0(t)$) be the vertical displacements sensed at the free surface through the scattering (resp. homogeneous) medium. Classically, this field is split into two contributions : the coherent and the incoherent part. The coherent wave is the ensemble-averaged field $\langle\varphi(t)\rangle$ (averaged over disorder configurations, here : cylinder's positions). We underline the difference between the coherent and the ballistic wave (i.e. the first arrival). For a detailed discussion about scattering effect on coherent and ballistic waves, see [Derode et al. (2001b)]. Away from resonances, the coherent wave can be roughly thought of as an attenuated version of the direct wavefront $\varphi_0(t)$. When there is no intrinsic dissipation, the energy of the coherent wave decays with the slab thickness H as $e^{-H/\ell}$, where ℓ is the elastic mean free path. Assuming a dilute set of scatterers, the elastic mean-free path is simply related to the scatterers density n and their

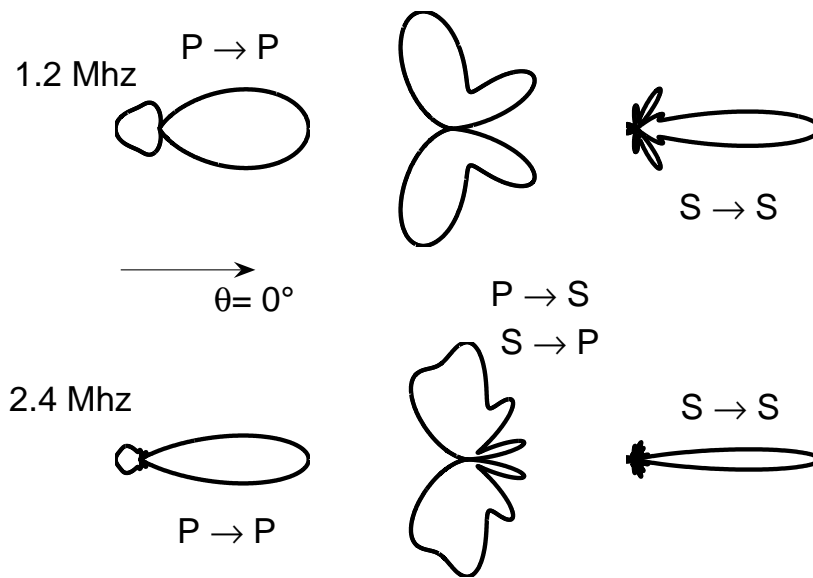


FIG. 5.17 – Differential scattering cross-sections of a cylindrical cavity calculated for a compressional (P) or shear (S) incident plane wave around 1.2 MHz (top) and 2.4 MHz (bottom). The scattered wave is either compressional (P) or transverse (S). Each pattern is normalized by its maximum.

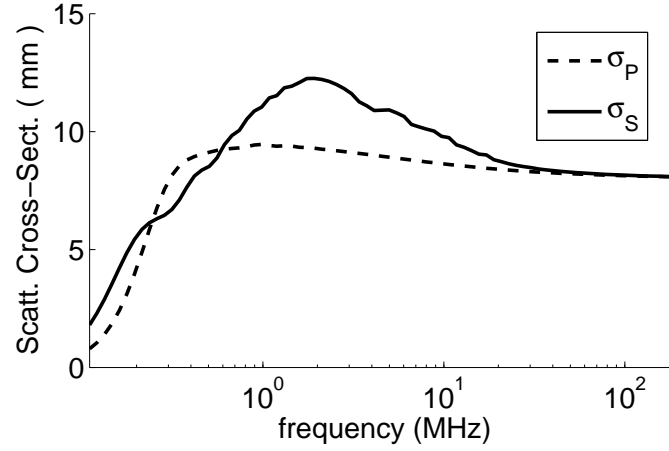


FIG. 5.18 – Elastic (σ) scattering cross-sections calculated for shear (S) and compressional (P) plane wave impinging on a cylindrical void with diameter 4 mm. Between 0.8 and 3.2 MHz, scattering is stronger for shear waves. At high frequencies the elastic cross-sections tend to the limit of twice the geometrical diameter.

elastic cross-section σ :

$$\ell = \frac{1}{n\sigma}$$

From the theoretical scattering cross section calculated above, we find $\ell_P = 10.3$ mm. In order to measure the mean-free path experimentally, we used two aluminum slabs of exactly the same dimensions. The first served as a reference and provided measurements of $\varphi_0(t)$ for different source-sensors positions. The second one was drilled with holes. By translating the source-receiver device along the slab, we achieved something very similar to a configurational averaging and measured the energy of the coherent wave $\langle \varphi(t) \rangle^2$. Between 0.8 and 3.2 MHz, we obtained $\ell_P = 9 \pm 2.5$ mm from these experiments.

The intensity of the incoherent part was also studied. The time evolution of the averaged incoherent intensity $I(t) = \langle \varphi(t)^2 \rangle$ is governed by another parameter : the transport mean free path ℓ^* . In an elastic body, transport quantities have been theoretically defined by [Turner \(1998\)](#) :

$$\ell_P^* = \frac{1}{n} \frac{\sigma_S - \sigma_{SS}^* + \sigma_{PS}^*}{(\sigma_P - \sigma_{PP}^*)(\sigma_S - \sigma_{SS}^*) - \sigma_{PS}^* \sigma_{SP}^*} \quad (5.8)$$

$$\ell_S^* = \frac{1}{n} \frac{\sigma_P - \sigma_{PP}^* + \sigma_{SP}^*}{(\sigma_P - \sigma_{PP}^*)(\sigma_S - \sigma_{SS}^*) - \sigma_{PS}^* \sigma_{SP}^*} \quad (5.9)$$

with $\sigma^* = \int \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \cos(\theta) d\theta$. It was evaluated numerically : $\ell_P^* \approx \ell_S^* = 5.5$ mm. In an experiment, this parameter is very hard to measure with a reasonable precision. The coherent backscattering effect [[Wolf and Maret \(1985\)](#); [Van Albada and Lagendijk \(1985\)](#); [Tourin](#)

et al. (1997); *Larose et al.* (2004b)] (also referred to as weak localization) does give a direct estimation of the transport mean free path but our experimental configuration did not allow this special measurement since we could not place a laser sensor in the vicinity of the laser source. Yet we checked that the experimental intensity decay $I(t)$ gives an order of magnitude for ℓ^* that is consistent with the theoretical value.

For the sake of simplicity we propose a 2-D scalar wave model for $I(t)$ [*Trégourès and van Tiggelen* (2002c)], under the diffusion approximation. In an infinite slab of thickness H with perfect reflections on both sides, the averaged transmitted intensity reads :

$$I(X, t) = I_0 \left\{ \frac{1}{2H\sqrt{\pi Dt}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{H\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{n^2 \pi^2 Dt}{H^2}} \right\} e^{-\frac{X^2}{4Dt} - \frac{t}{\tau_{abs}}}$$

with τ_{abs} the absorption time (taking into account the intrinsic absorption in the aluminum and the lateral leaking due to the plasticine) and D the diffusion constant. X is the lateral distance between source and receiver. This formula is obtained using a modal decomposition of the diffusion equation in the z direction. The intensity $I(t)$ is a mix of compressional and shear waves, each mode traveling with its own parameters (velocity, ℓ^* , diffusion constant) and interchanging their energy through scattering events. In our experiment ℓ_S^* and ℓ_P^* are of the same order. The diffusion constant was approximated by $D = \frac{1}{2(1+2v_P^2/v_S^2)}(v_P\ell_P^* + 2v_S(\frac{v_P}{v_S})^2\ell_S^*) \approx 40 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$. This assumption is valid after a couple of mean free times, when the equipartition regime [*Hennino et al.* (2001)] is set. Equipartition means that the density of compressional and transverse modes equilibrates. Considering the specific velocities of each mode [*Weaver* (1982)], we infer that 80% of the energy is transported by S waves, and only 19% by P waves (and an additional 1% for surface waves). Hence our best fit (fig. 5.19) of the intensity decay in the coda gives $\tau_{abs} = 120 \mu\text{s} \pm 10\%$ and $\ell^* = 5 - 20 \text{ mm}$.

5.3.4 Two-point correlation of diffuse fields

In this section we focus on the experimental reconstruction of the direct Green's function from "passive" correlations. The main idea is to correlate diffuse fields sensed at two different locations on the top side when a source generates bulk waves at the bottom. Since we record the vertical component of the surface displacements, the two-point correlations should simulate a vertical source at the surface, which mainly generates surface waves. Indeed, the experimental correlations we obtained reveal a wave packet that travels at the speed of a Rayleigh wave. We insist that our sources do not generate surface waves at the top side of the slab. Moreover if a surface wave happened to be generated anywhere, it would be completely absorbed by the plasticine. Under these conditions no Rayleigh wave should travel on the top surface, and no Rayleigh wave should be passively retrieved by correlations. Why then should passive imaging give rise to a Rayleigh wave train in our experiment ?

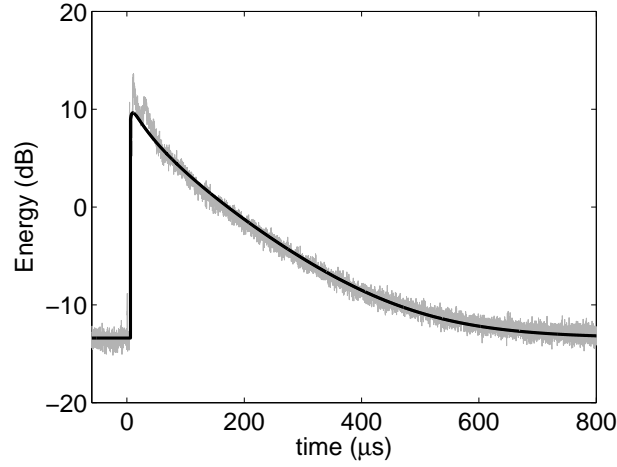


FIG. 5.19 – Averaged intensity $I(t)$ and theoretical fit for scalar wave diffusion in a 2-D semi-infinite slab with thickness $H = 24$ mm. $\ell^* = 5.5$ mm and $\tau_{abs} = 120$ μ s.

We propose first to examine the role of scatterers for the emergence of the direct Rayleigh wavefront in the correlations. To that end we separately correlated coda records obtained through two different aluminum slabs : the first drilled with holes, the second without. Each impulse response was lasting ≈ 800 μ s before reaching the noise level (see fig. 5.16). We underline that these record lengths are far from the Heisenberg time (break time) at which the modes of the aluminum block would be resolved (here $T_H \approx 10^6$ μ s) and correlations would naturally converge to the Green's function. This modal approach is irrelevant to our experiment. The records were correlated and averaged over the 35 available sources. For the scattering slab, this reads :

$$\langle C_{ij}(\tau) \rangle = \sum_{S=1}^{35} \int_{t=0}^{t=600 \mu s} \varphi(S, X_i, t) \varphi(S, X_j, t + \tau) dt$$

where X_i and X_j are the sensors points (running from $X_0 = 0$ mm to $X_6 = 60$ mm along the array). And for the homogeneous slab :

$$\langle C_{ij}^0(\tau) \rangle = \sum_{S=1}^{35} \int_{t=0}^{t=600 \mu s} \varphi_0(S, X_i, t) \varphi_0(S, X_j, t + \tau) dt$$

To enhance the signal-to-noise ratio, each correlation is time symmetrized ($= \langle C(+\tau) \rangle + \langle C(-\tau) \rangle$) and normalized by its maximum. Results are displayed in fig. 5.20 and 5.21. A propagating wavefront (traveling at the Rayleigh wave velocity $v_R = 2.9$ mm/ μ s) is clearly visible in the presence of scatterers, whereas it does not appear in the homogeneous slab. We also summed the 6 normalized propagating peaks after having delayed each signal according to the Rayleigh wave travel time. The summation is displayed in the enclosed box on each figure. In the scattering slab, its amplitude nearly corresponds to the coherent

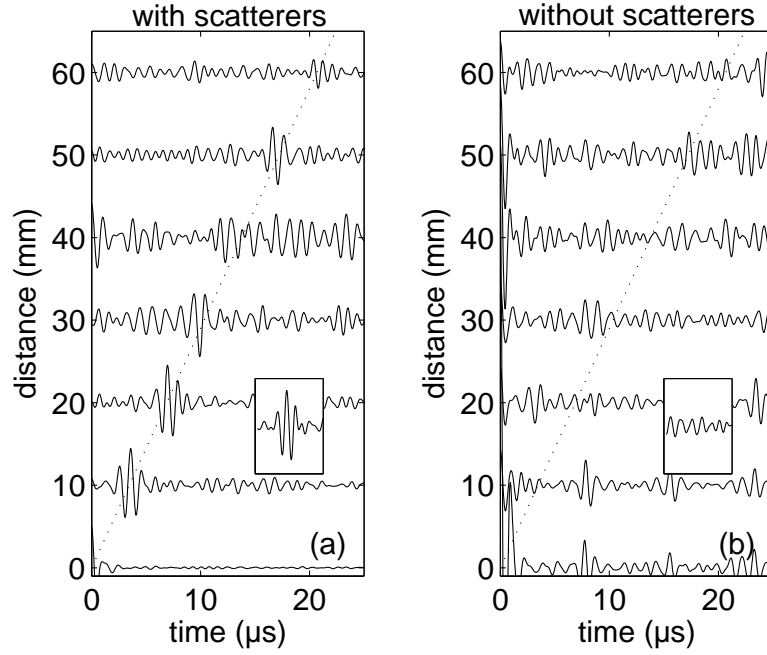


FIG. 5.20 – Green's function reconstruction for different pairs of receivers. Correlations are averaged over the 35 sources and filtered in the 0.8-1.6 MHz frequency band. On the left (a) are displayed the 7 cross-correlations $\langle C_{ij}(\tau) \rangle$ in the diffusive aluminum plate. On the right (b) the 7 cross-correlations $\langle C_{ij}^0(\tau) \rangle$ are obtained in an equivalent aluminum block without any hole, where the mode conversion possibly occurring at the edges was suppressed by the plasticine. The insets show the summation of the 6 wavefronts from $X_0 = 10$ mm to $X_6 = 60$ mm after a time-reduction based on the Rayleigh wave speed (dotted line, $v_R = 2.9$ mm/ μ s).

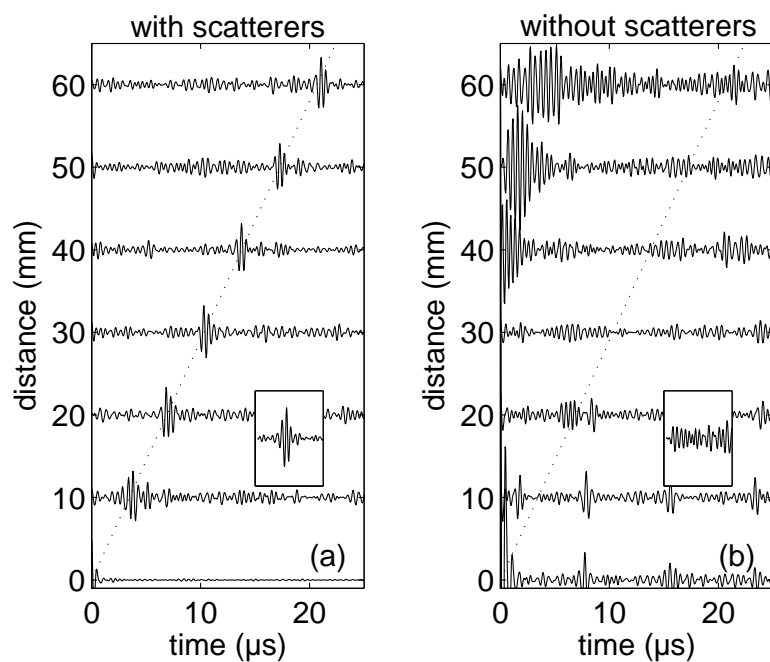


FIG. 5.21 – Same figure as fig. 5.20 except correlations are filtered in the 1.6-3.2 MHz frequency band. The signal-to-noise ratio in (a) is increased compared to the results obtained at lower frequencies.

addition of 6 pulses. In the homogeneous device, the amplitude of the summation is ≈ 2.5 (incoherent addition of 6 uncorrelated fields). We conclude on the necessity of mode coupling due to scattering for the Rayleigh wave to emerge from the passive correlations of diffuse fields generated by bulk waves sources. This is especially relevant for applications to seismology. Therefore, it appears once again [Derode *et al.* (2003a)] that the role of scattering is crucial in "passive imaging". Firstly, because of multiple scattering, at late times the equipartition regime can be attained whatever the sources/receivers positions. Secondly, because of mode conversions due to the scatterers, a Rayleigh wave emerges from the passive correlations even though no Rayleigh wave was generated by the sources. Note that the bandwidth in the upper band record is a little wider than in the lower band. This was done to compensate for the coda shortening ($< 600 \mu\text{s}$) so that the product $T\Delta f$ is kept constant.

We can go a little further and catch a glimpse of the time symmetry properties. We performed the correlations into two consecutive time windows : from 0 to $45 \mu\text{s}$ and from $45 \mu\text{s}$ to $600 \mu\text{s}$, and did not time-symmetrize the correlations (fig. 10 and 11). $45 \mu\text{s}$ is twice the time after which the diffuse energy spreads homogeneously along the array of receivers (length $L = 30 \text{ mm}$) : $L^2/4D \approx 22 \mu\text{s}$ in an open 2-D scattering medium. The time series were filtered in two frequency bands : 0.8-1.6 MHz and 1.6-3.2 MHz.

In the first time-window, from 0 to $45 \mu\text{s}$, correlations are asymmetric in time. This means that the *causal* part ($\tau > 0$) and the *acausal* part ($\tau < 0$) of the correlations are different (see left part of fig. 5.22 and fig. 5.23). In the *causal* part, a Rayleigh wavefront is clearly visible whereas noise is dominating the *acausal* part. This is due to the preferential direction of Rayleigh wave propagation (waves traveling from X_0 to X_3 in our experiment). There is a net flux of energy from X_0 to X_1 , X_2 and X_3 (distances 10, 20 and 30 mm in fig. 5.22 and fig. 5.23). This flux is due to the uneven distribution of sources in comparison to the receiver couples $X_0 - X_1$, $X_0 - X_2$ and $X_0 - X_3$: most of the sources are on the X_0 's side. At the early times of the coda (from 0 to $45 \mu\text{s}$), the diffusion regime is not yet attained.

Later in the coda, from $45 \mu\text{s}$ to $600 \mu\text{s}$, the wave field in the bulk of the aluminum slab is very likely to be equipartitioned. In the low frequency band (0.8-1.6 MHz), the time-symmetry of the correlation is indeed restored [van Tiggelen (2003); Paul *et al.* (2005)] (see right part of fig. 5.22) : Rayleigh waves travel in all directions. Nevertheless and surprisingly, the asymmetry persists in the high frequency band (from 1.6 MHz to 3.2 MHz, see right part of fig. 5.23). To interpret this observation, we have carefully studied the location of the scattering sources around the array. In the high frequency band, the Rayleigh wavelength is $\sim 1.5 \text{ mm}$. The generation of Rayleigh waves by scattering necessarily occurs in the first half-wavelength beneath the free surface [Maeda *et al.* (2004)]. In our scattering slab, one hole was nearly showing on the surface (position $X < 0$), another one was 0.61 mm beneath (position $X > 60 \text{ mm}$), the others being located much deeper. Rayleigh wave trains are mainly generated by the hole nearest to the surface, then propagate along the array of receivers (from X_0 to X_6 point). These waves are almost not perturbed (attenuated) until they reach the edges of the slab and the absorbing plasticine. They contribute to a very

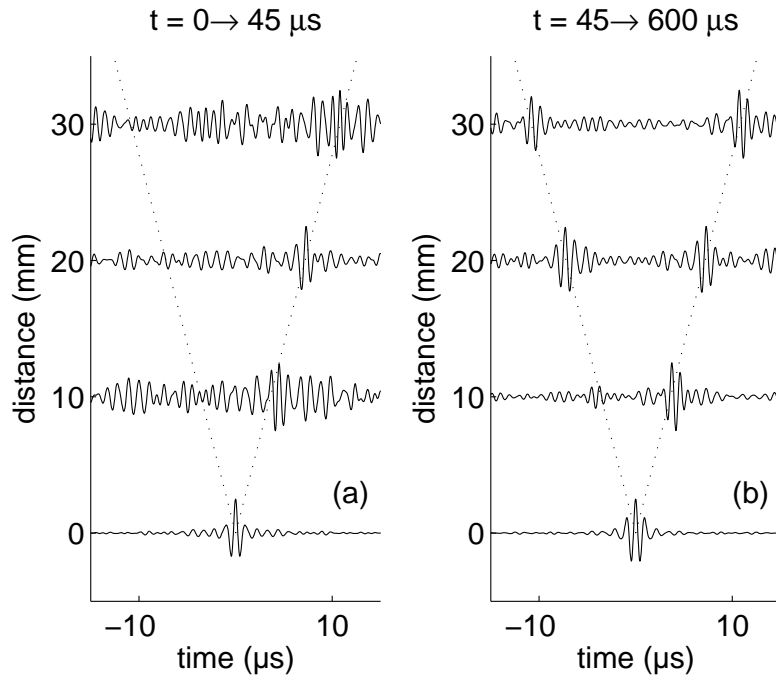


FIG. 5.22 – Evolution of the asymmetry in the reconstructed Green's function in the low frequency regime (0.8-1.6 MHz), for early (a) and late (b) times. At early times, the waves are exciting scatterers on one side of the receiving array more than the other. The energy flux is clearly going from the source to the rest of the medium. After $45 \mu\text{s}$ the field is equipartitioned and the scattering halo fills the array, leading to a more symmetric correlation.

clear propagating pulse in the positive part of the correlation. The weak coupling due to the deeper hole ($z = -0.61$ mm) on the X_6 side contributes to a smaller pulse propagating from X_6 to X_0 in the negative part of the correlations.

This interpretation is in agreement with observations in the low frequency band (0.8-1.6 MHz), where the average Rayleigh wavelength is 3 mm (fig. 5.22). At least 5 holes are present in the first half wavelength and should cause significant scattering of Rayleigh waves and coupling between surface and bulk waves. This time, the holes are evenly distributed along the sensor array. In the late coda, correlations $X_0 \times X_1$, $X_0 \times X_2$ and $X_0 \times X_3$ are nearly symmetric. The time symmetry is obtained thanks to scattering by a symmetric distribution of scatterers. Under these conditions, a global equipartition among bulk and surface waves is guaranteed. Furthermore the reconstructed surface wave is strongly attenuated along its path because it senses many scatterers along the array. In addition, these scatterers contribute signals around $\tau = 0$ in the correlations, which degrade the reconstruction. We think this interpretation explains why the symmetric wavefront is much more noisy at low frequencies (fig. 5.20), where lots of cavities are encountered in the first half wavelength, than at higher frequencies where the Rayleigh wavefront can propagate freely (fig. 5.22).

Finally, we comment on the possible misidentification of the waves that are reconstructed in our experiment. Indeed, if many scatterers are present within a wavelength, the overall wave velocity may be different (effective medium). In the heterogeneous plate, a reduced-speed shear wave might propagate with the same wavespeed as a Rayleigh wave in the bulk aluminium plate (i.e. without cavities). In our experiment, the hole interspacing is 10 mm on average, which is larger than the largest ultrasonic wavelength. Thus, it is reasonable to assume that the shear waves propagate in the aluminium plate with the same wavespeed as in the bulk. The measured wave velocity is 2.9 mm/ μ s at all frequencies (from 0.8 MHz to 3.2 MHz) and indeed corresponds to the velocity of the Rayleigh wave.

5.3.5 Conclusion

In this paper were presented laboratory experiments of elastic wave propagation in heterogeneous media at ultrasonic frequencies. An aluminum slab was made quasi-infinite by the use of absorbing boundaries to mimic the Earth's crust, in which scattering was obtained drilling cylindrical cavities. A relatively simple theoretical model for wave scattering properties was proposed. Wave field generation and detection was achieved using contactless and quasi-punctual laser devices. The cross-correlation of diffuse fields was performed, allowing us to retrieve passively the Rayleigh wave between two sensors only when scattering was present. Without scatterers, and in the case of bulk wave generation and surface detection, no Rayleigh wave was reconstructed. This illustrates the role of scattering and mode conversion in the Green's function passive reconstruction.

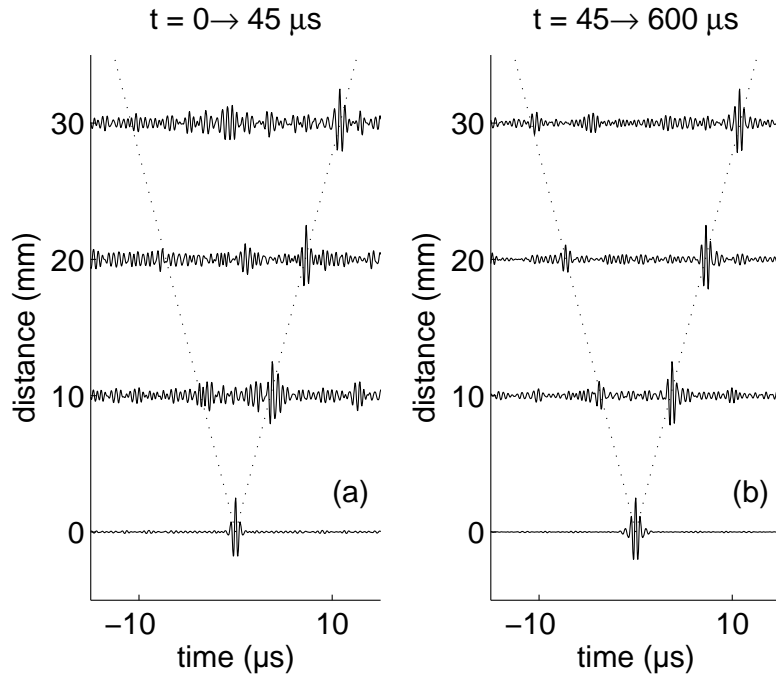


FIG. 5.23 – Evolution of the asymmetry in the reconstructed Green's function in the high frequency regime (1.6-3.2 MHz), for early (a) and late (b) time windows. At early times, the waves are exciting scatterers preferably on one side of the receiving array. After 45 μs , bulk waves are expected to be equipartitioned, but not Rayleigh waves. Mode conversion to Rayleigh waves mainly occurs at one scattering cavity, leading to an anisotropic energy flux, and an asymmetric correlation.

Analysis for different time-windows and frequency bands were conducted. Previous works in acoustics [*Weaver and Lobkis (2005)*] and seismology [*Campillo and Paul (2003)*] observed that the Rayleigh wave reconstruction was harder with increasing frequency. Here we found that the Rayleigh wave reconstruction was more efficient in the high frequency band. In addition we observed that even in the late coda where waves are expected to be equipartitioned, asymmetry in the correlations may remain. Both observations are due to the very specific coupling between bulk and Rayleigh waves, which occurs if scatterers are present in the first wavelength beneath the free surface. We emphasize that equipartition of bulk waves does not always mean equipartition of surface waves. On the one hand, our experiments show the need of scattering to passively retrieve the impulse response between two sensors, on the other hand they show that scattering occurring between the sensors degrade the reconstructed Rayleigh waves. The trade-off between the two effects should be further investigated. Though our experiment was designed for seismological applications, results should be applicable to other fields of wave physics where both surface and bulk waves are present.

5.3.6 Appendix : Calculation of the scattering cross-section of a cylindrical cavity.

Here follows a brief calculation of the wave field scattered by a cylindrical cavity insonified by a plane compressional wave. Three displacement potentials are relevant : Φ_i is the displacement potential of the incident P wave, Φ_s is the scattered P wave potential and Ψ_s is the scattered S wave potential. They can be expanded as :

$$\begin{aligned}\Phi_i(r, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^m J_m(k_P r) \cos(m\theta) e^{-i\omega t} \\ \Phi_s(r, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_P r) \cos(m\theta) e^{-i\omega t} \\ \Psi_s(r, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(k_S r) \sin(m\theta) e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

where J_m and $H_m^{(1)}$ are respectively the Bessel and Hankel functions both of first kind and of order m and ε_m is the Neumann factor. Taking into account the null traction condition at the surface of the cylinder allows the calculation of the A_m and B_m coefficients. Those coefficients are given in [*Pao and Mow (1995)*; *Faran (1951)*; *Liu et al. (2000)*]. The scattering cross-sections are

$$\begin{aligned}\sigma_{P \rightarrow P} &= \frac{2}{k_P} [2|A_0|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |A_m|^2] \\ \sigma_{P \rightarrow S} &= \frac{2}{k_S} [\sum_{m=1}^{\infty} |B_m|^2]\end{aligned}$$

$$\sigma_P = \sigma_{P \rightarrow P} + \sigma_{P \rightarrow S}$$

The corresponding differential scattering cross-sections are given by :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{P \rightarrow P}}{\partial \theta}(\theta) &= \frac{4}{k_P} \left| \sum_{m=0}^{\infty} A_m i^{-m} \cos(m\theta) \right|^2 \\ \frac{\partial \sigma_{P \rightarrow S}}{\partial \theta}(\theta) &= \frac{4}{k_S} \left| \sum_{m=1}^{\infty} B_m i^{-m} \sin(m\theta) \right|^2 \end{aligned}$$

5.4 Empirical synthesis of time-asymmetrical Green functions from the correlation of coda waves

Anne Paul, Michel Campillo, Ludovic Margerin, Eric Larose , Arnaud Derode.
accepté à *J. Geophys. Res.*

Abstract

We demonstrate the existence of long range field correlations in the seismic coda of regional records in Alaska. The cross-correlations between the different components of coda records at two points are measured for a set of distant earthquakes. Remarkably, while individual correlations have a random character, the correlations averaged over source and time exhibit deterministic arrivals that obey the same symmetry rules as the Green tensor between the two points. In addition, the arrival times of these waves coincide with propagating surface waves between the two stations. Thus, we propose to identify the averaged correlation signals with the surface wave part of the Green tensor. We observe the causal and anticausal parts of the Green function. However, we find experimentally that amplitudes at positive and negative times are not equal. We explain this observation by the long lasting anisotropy of the diffuse field. We show that the flux of energy coming from the source can still dominate the late coda and result in non-symmetric cross-correlations when the distribution of earthquakes is not isotropic around the stations. The extraction of Green functions from coda waves allows new types of measurements with seismic waves along paths between stations that could not be obtained with the waves produced by earthquakes.

5.4.1 Introduction

Recent studies [[Weaver and Lobkis \(2001\)](#); [Lobkis and Weaver \(2001\)](#); [Weaver and Lobkis \(2002\)](#)] showed from laboratory experiments with ultrasonic and thermal noise that the Green function can be extracted from the correlation properties of random fields. In seismology, two kinds of fields are usually considered as random : the seismic noise and

the scattered waves of the coda. The idea of using random noise to extract deterministic signals had already been proposed and had found spectacular applications in helioseismology [Duvall *et al.* (1993); Rickett and Claerbout (2000)]. Seismic noise has the advantage to be easy to record and to exist even in regions without earthquakes. Shapiro and Campillo (2004) have shown that coherent broadband dispersive wave trains emerge from the cross-correlation of ambient seismic noise records between stations many hundred kilometers apart and that dispersion curves can be measured in the absence of earthquake records. However, the question of the origin of seismic noise is still open. Without a clear understanding of the source of the seismic noise, the relevant propagation regime (ballistic, diffusive..) remains unknown. It is thus difficult to better understand the properties of the emergence of the Green function from diffuse wave fields using only noise records.

In this paper, we concentrate on coda waves since they are produced by a known source, with precise location and origin time, and they have been shown to result from multiple scattering in the Earth lithosphere. Campillo and Paul (2003) showed that extracting the Green function from field-to-field correlation of scattered waves is a valid approach not only in the controlled and favorable conditions of the laboratory, but also with natural signals such as actual seismograms produced by earthquakes. They used coda waves produced by moderate earthquakes in Mexico. The part played by multiple scattering and diffusion in the coda of the seismograms has been a subject of discussion since the pioneering papers of Aki (1969) and Aki and Chouet (1975). The importance of multiple scattering for the seismic coda is attested by the success of the use of radiative transfer theory to explain the observation of energy decay [Abubakirov and Gusev (1990); Hoshihara (1991); Margerin *et al.* (1998, 1999)]. Furthermore, the diffuse character of coda waves has been demonstrated by the observation of the stabilization of different energy ratios [Campillo *et al.* (1999); Shapiro *et al.* (2000); Hennino *et al.* (2001)], a phenomenon associated with the principle of equipartition in the phase space of a random field [e.g. Weaver (1982)]. Equipartition means that all the possible modes are excited at the same level of energy.

In the present context, the word modes refers to all body waves or normal modes of surface waves that are potentially excited in the region probed by the diffuse field and can be coupled by local scattering. Equipartition is a property of diffuse elastic waves. It implies a stabilization of the ratio of S to P wave energy with time, independently of the source. It is an important point in the context of the present paper since it indicates that the modes which make up the Green function are represented in the diffuse field. In the following, we first summarize theoretical and experimental arguments that clarify the conditions for the emergence of the Green function from field correlations. We then present an application with data from a temporary broadband network in Alaska. Finally we discuss the role played by the source distribution and the time evolution of the wave-field structure toward complete randomness.

5.4.2 Emergence of the Green Function and Multiple Scattering

Contrary to ballistic waves, fully diffuse wave fields are expected to contain all possible modes and propagation directions following an equipartition principle. As explained above, this has been observed for coda waves through the stabilization of P to S energy ratio. Formally, an implication of the presence of all modes is that the information about any possible path is represented in the coda records. Mathematically, a wave field inside a finite elastic body can be expressed in modal form :

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n \phi_n(\mathbf{x}) e^{i\omega_n t} \quad (5.10)$$

where \mathbf{x} is position, t is time, ϕ_n is a convenient set of eigenfunctions, ω_n are eigenfrequencies, and a_n are modal excitation functions that depend only on the source. When disorder is added inside the body, after a sufficiently long time, the field becomes diffuse and a_n become random functions of time. Equipartition means that the modal amplitudes are uncorrelated random variables :

$$\langle a_n a_m^* \rangle = \delta_{nm} F(\omega_n) \quad (5.11)$$

where $F(\omega)$ is the spectral energy density of the source in the frequency band $[\omega - \delta\omega, \omega + \delta\omega]$. An implication of equation 5.11 is that all modes in a narrow frequency range are excited at the same energy level. The brackets in equation 5.11 mean either an ensemble average over the disorder or a time/frequency average of a single realization. Another type of average can be performed by considering a distribution of sources inside the body. In this case, a_n is a function of the location of the source and the bracket in 5.11 denotes a volume integral over source positions. The average correlation between the fields at locations x and y simply becomes :

$$\langle C(x, y, \tau) \rangle = \sum_n F(\omega_n) \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{y}) e^{-i\omega_n \tau} \quad (5.12)$$

since the cross-terms disappear on average due to 5.11.

The expression 5.12 differs only by an amplitude factor F from an actual Green function between points \mathbf{x} and \mathbf{y} . A very important implication of this result is that the Green function between two locations (or at least, the arrival times of the different wave trains) can be extracted from the diffuse field with a simple field-to-field correlation averaged either over a sufficiently long time or an extended enough source distribution.

Weaver and Lobkis (2001) exposed the above arguments and showed in laboratory experiments that the appropriately filtered average cross-correlation of the fields at two positions is the Green function between the two points. The same arguments hold for an open medium as well [*Weaver and Lobkis* (2004)]. Under the assumption of complete randomness of the wavefield, *Snieder* (2004) gave a ray geometrical interpretation of the reconstruction.

Arguments such as those above which depend on assumptions of well developed diffuse fields are perhaps problematic for application to seismology because the distribution of earthquakes is discrete and uneven. Furthermore, the duration of available time series is limited by dissipation and ambient noise. Field fluctuations are expected that appear in the correlation function as a noise superimposed onto the expected deterministic signal. Small energy arrivals will emerge only after a very long averaging. In practical applications with the type of data available, we therefore expect to reconstruct only the more energetic parts of the Green function.

Laboratory experiments with ultrasound and numerical simulations help to investigate the possibility of reconstructing the Green function in conditions close to those encountered in seismology. [Derode et al. \(2003a,b\)](#) proposed an interpretation of the emergence of the exact Green function from the cross-correlation of the fields received by two passive sensors in a heterogeneous medium. Their argument is based on an analogy of the averaging of a cross-correlation function over a series of sources with a physical operation of time reversal that can be performed in the laboratory [[Fink et al. \(1992\)](#); [Wu et al. \(1992\)](#)]. The operation of cross-correlation of the signal produced by a source in S at receivers in A and B is formally equivalent to having a source in A producing waves recorded in S , time-reversed and re-emitted from S to be recorded in B [[Derode et al. \(2003b\)](#)]. This last operation is exactly what is realized in a time-reversal mirror. This analogy shows how cross-correlation is related to the physical wave propagation.

We illustrate this point with numerical simulations conducted in a 2-D acoustic medium. This configuration is chosen because it is a simple way to describe wave propagation at the surface of the Earth. We solve the wave equation using a finite difference code [[Tanter \(1999\)](#); [Derode et al. \(2001a\)](#)]. The field produced by each of several sources S is computed at each point of the medium. We consider a weakly scattering medium, where the distance of propagation is smaller than the transport mean free path of the waves. We recall that the transport mean free path l^* is the typical distance after which the scattered energy of a wave in a particular direction is spread over all directions. The scattering is caused by a distribution of small rigid scatterers with radius a . The background velocity is 3.3 km.s^{-1} . The product of the wavenumber k by the radius a equals 1. Following the time-reversal analogy developed by [Derode et al. \(2003b\)](#), we choose to place the sources S all around A (the reference point at the center of the grid marked with a cross in Figure 5.24a) in order to form an equivalent of a perfect time reversal mirror. This configuration is depicted in Figure 5.24a). Each source S sends a broadband pulse with 0.1 Hz central frequency. The correlations are computed between the field $h_{SA}(t)$ at the reference point A and the field $h_{SR}(t)$ at any other point $R(x, y)$ of the grid. The correlation is averaged over the entire set of sources S . The wave field reconstructed by correlations is displayed in fig. 5.24 for correlation times -30 s , 0 s and 30 s . Time $t = 0$ is the central time of the correlations, when all the energy is focused in A as if A was a source. At negative times, we observe a converging wavefront, and a diverging wavefront at positive times. These wavefronts correspond to the causal (positive times) and anticausal (negative times) parts of the Green

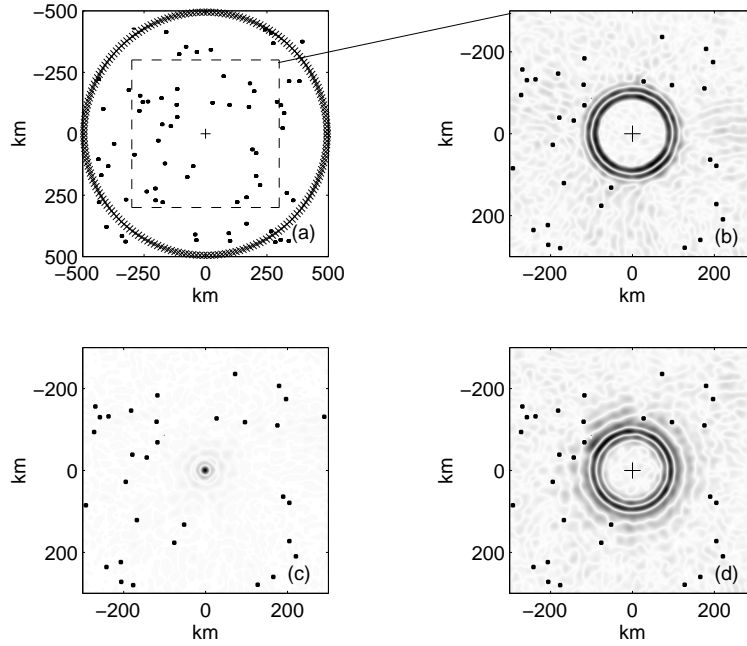


FIG. 5.24 – Numerical simulation of the reconstruction of the causal and anticausal parts of the Green function from cross-correlations. (a) Configuration of the numerical experiment. 1000 sources S (\times) are surrounding the reference point A ($+$). The black dots indicate the point scatterers. (b) Snapshot of the cross-correlation between the field in A with the field at location (x, y) after averaging over the sources S for correlation time -30 s. The weakly diffusive medium is characterized by the transport mean free path $l^* = 640$ km which is larger than the distance between the points where the correlations are computed. A converging wavefront is well-defined and constitutes the anti-causal part of the Green function. (c) Snapshot for correlation time $t = 0$ s : the wavefront is focused on A . (d) Snapshot for $t = 30$ s : the diverging wavefront corresponds to the causal part of the Green function.

function between A and any point R in the medium. The nearly perfect reconstruction of the Green function (including the converging and diverging wavefronts) is due to the quasi-ideal distribution of sources around A , the length of the coda (as long as allowed by the numerical schemes : 200 oscillations) and the absence of absorption. This numerical experiment shows that cross-correlation corresponds to a physical process and is not an artifact of signal processing.

[Derode et al. \(2003a\)](#) and [Larose et al. \(2004a\)](#) showed the role of multiple scattering in enhancing the efficiency of the reconstruction of the Green function with a limited number of sources and finite durations of recording, in conditions closer to seismology. Since in seismology, the duration of records is limited by the presence of noise and by absorption, averaging over a set of different sources is required to expect the emergence of the Green function. The limitations of the reconstruction will be discussed in the following section after an application of this simple principle to a data set of actual seismograms.

5.4.3 Application to Coda Records

Data Processing

Temporary networks of seismic stations installed in regions with a high level of seismicity provide useful data sets to study the properties of the emergence of Green functions from the correlations of coda waves. They include numerous stations with identical instrument characteristics that make it possible to compute cross-correlations between many station couples separated by a large range of distances and with different orientations. Time-distance seismic sections can be constructed from the correlation signals where the propagating waves can be easily identified even with a poor signal-to-noise ratio. Actually, only limited averaging can be performed with coda records, and the deterministic signal is mixed with the remnant random fluctuations of the diffuse field.

We present here an application of the extraction of Green functions from coda waves to the data of a temporary network in Alaska. During the Broadband Experiment Across the Alaska Range (BEAAR), a network of 36 broadband seismographs was operated during 2.5 years ending in August 2001 [[Ferris et al. \(2003\)](#)]. Most stations recorded simultaneously about 100 regional earthquakes with magnitude larger than 3.3. Locations of stations and epicenters are shown in figure 5.25. Note that the distribution of earthquakes is not even and that they are mostly concentrated to the southeast of the network. The broadband seismograms were first band-pass-filtered. For each couple of stations, the horizontal components of the seismograms were rotated assuming the inter-station great circle path to be the radial direction. We used coda records starting 20 s after the arrival of the S wave and ending when the signal-to-noise ratio was smaller than 4. An example of record is shown in figure 5.26. Because of the exponential decrease of coda amplitude with time, we cannot perform a simple cross-correlation between the coda signals recorded at the two stations without strongly overweighting the earliest part of the coda.

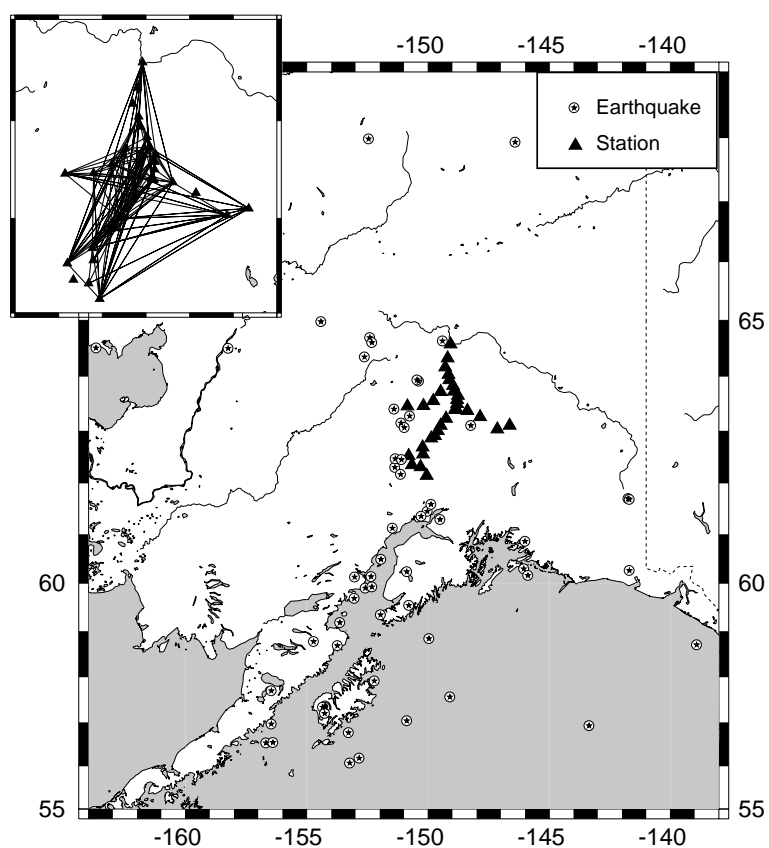


FIG. 5.25 – Map of stations and earthquakes. The paths between couples of stations for which average cross-correlations have been computed are shown in inset.

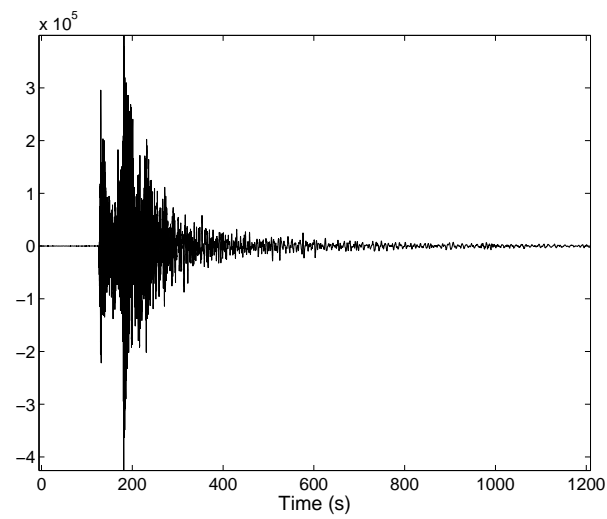


FIG. 5.26 – Example of broadband record from a regional earthquake. Note that the signal remains well above the noise level for several hundreds of seconds after the S wave arrival.

To avoid this problem, we followed [Derode et al. \(1999\)](#) by disregarding the amplitudes completely and considering only one-bit signals. [Campillo and Paul \(2003\)](#) checked that this procedure leads to the same results as compensating for amplitude attenuation with time in successive time windows. For each couple of stations, the cross-correlation of one-bit signals was computed for each earthquake, normalized to a maximum amplitude of one, and averaged over the entire set of events. This processing was performed for all combinations of components, such as vertical to vertical (Z/Z), vertical to transverse (Z/T), radial to radial (R/R), etc... The results of [Campillo and Paul \(2003\)](#) suggest that these different field-to-field correlations contain the different terms of the elastic Green tensor. [Wapenaar \(2004\)](#) demonstrated the retrieval of the elastic Green tensor from surface displacement fields produced by a distribution of sources on a closed surface in the medium. Even if the source distribution does not fulfill such a condition in actual experiments, he gives a firm theoretical argument for the reconstruction of the polarized elastic response.

Results

Figure 5.27 shows the results of the processing in the frequency band $0.08 - 0.3$ Hz. The nine polarization combinations correspond to the terms of the Green tensor, that is for example the R/Z correlation corresponds to the vertical displacement produced by a force in the radial direction. Since we disregard the amplitudes of the coda waves by using one-bit signals, the relative amplitude of the reconstructed signals between the components is lost. Traces with a maximum amplitude at negative time have been time-reversed to concentrate the large-amplitude pulses at positive times and have a better view of the presence, or the absence, of symmetry in time. Note that the location of the maximum amplitude pulse at positive or negative times only depends on the order of the signals in the cross-correlation, which is arbitrary. Clear propagating wave trains can be observed on the Z/Z, Z/R, R/Z, R/R, and T/T components. The Z/T, R/T, T/Z, and T/R components only contain noise, as expected from the symmetries of the Green tensor. This figure confirms the conclusions of [Campillo and Paul \(2003\)](#) for numerous paths with different azimuths.

When a propagating branch can be seen at positive times, a symmetric one is more or less clearly visible, depending on the component, at negative times. This symmetric wave train is particularly clear on the Z/Z and T/T components at short offsets. We discuss the question of the time symmetry in more details in the next section.

To test the reliability of the extraction of the Green function from the data, we computed synthetic Green functions in a 1-D velocity model derived from the seismic profiles recorded by [Beaudoin et al. \(1991\)](#) in the neighbor Tanana terrane. The computations are performed for a vertical point source acting at the free surface. The receivers are also at the free surface in a configuration similar to our station-to-station measurements. The synthetic section in the frequency band $0.08 - 0.3$ Hz is shown in figure 5.28 in the same distance range as in fig. 5.27. It is dominated by low-frequency surface waves (Rayleigh waves in this case), as the cross-correlation records. As expected for a point force source at the free

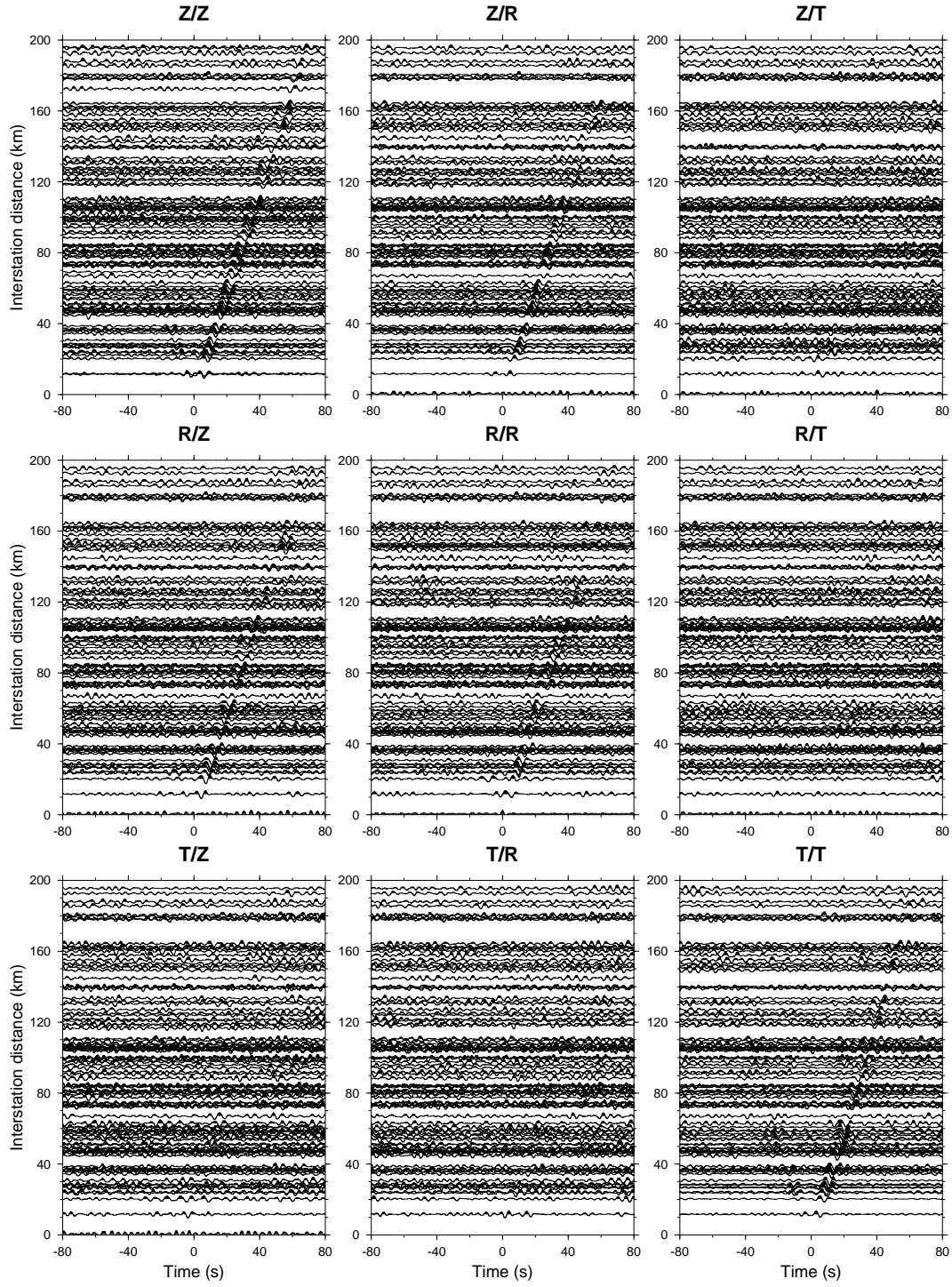


FIG. 5.27 – Average cross-correlations as a function of interstation distance. The correlations have been computed for every combination of components of motion, vertical (Z), radial (R) and transverse (T).

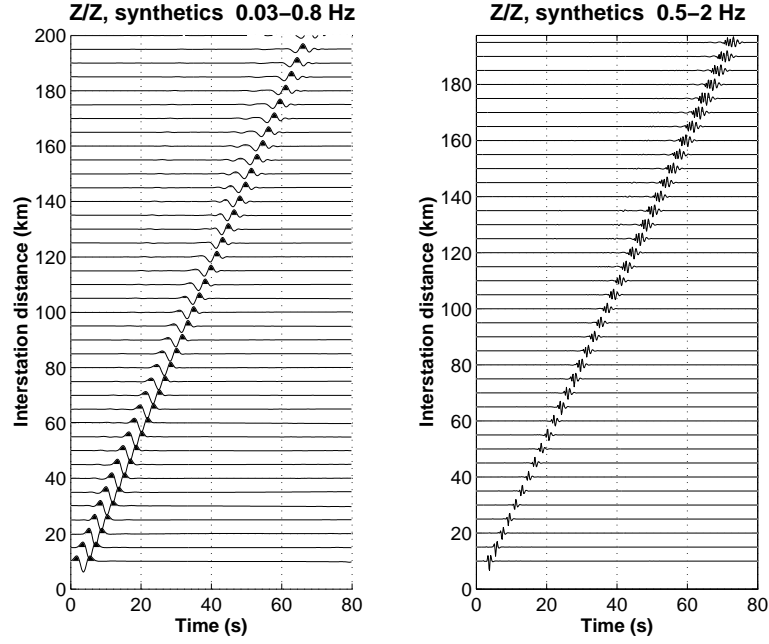


FIG. 5.28 – Synthetic vertical seismograms for source and receivers at the free surface in a flat-layered crust. The source is a vertical force. Two different frequency bands are considered. Note the prominence of the Rayleigh waves.

surface, the body wave contributions to the Green functions are negligible. We performed the same computation in a frequency band centered on 1 Hz (figure 5.28). The surface waves still dominate. This argument based on a flat-layered structure must be moderated by the fact that surface waves at these frequencies are strongly diffracted by topography and shallow structures which are neglected in the 1-D model. It is nevertheless a good indication that the assumption that the prominent arrivals in the actual surface/surface Green function are surface waves is reasonable for the frequency and distance ranges considered here.

The reconstructed arrivals can be observed at distances as large as 200 km , confirming the existence of strong long range correlations in coda waves. As already observed by [Camillo and Paul \(2003\)](#), and demonstrated by the comparison with synthetics, the dominant signals correspond to the fundamental Love and Rayleigh waves. A simple phase velocity measurement on the Z/Z and T/T components of Figure 5.27 confirms that the velocities of the prominent wave trains are in a good agreement with the expected dispersion curves of Rayleigh and Love waves in the simple model derived from [Beaudoin et al. \(1991\)](#). The signal-to-noise ratio decreases with increasing distance. This is a natural consequence of the spatial decay of the Green function. The deterministic signal decreases rapidly while the physical fluctuations of the diffuse fields remaining after partial averaging are independent of the epicentral distance. We assume here that the fluctuations are proportional to the square of the amplitude of the diffuse field. This amplitude is known to vary weakly with

distance in the diffuse regime. It has been shown to be almost independent of distance for the late coda [e.g. Figure 5.26 in [Lacombe et al. \(2003\)](#)]. These observations suggest that even amplitude characteristics could be reconstructed from field correlations. However, a reliable measurement of the amplitude decay with distance would require that the same set of earthquake records and time windows are used for all the couples of stations. It is not the case here since all stations were not operating exactly at the same time.

We are only able to reconstruct the surface waves because the Green function is expected to be dominated by surface waves. A high level of noise remains after the limited averaging we performed. It prevents an unambiguous identification of body waves. The reconstruction of the high frequencies is difficult because absorption limits the durations of the available coda records. These limitations could be overcome with a larger data set.

5.4.4 Time Symmetry and Isotropy of Diffuse Wave Fields

Observations

In Figure 5.27, we have arbitrarily chosen the direction of time so that the maximum amplitude of the average cross-correlation is at a positive time. Swapping the two stations in the cross-correlations gives a time series which is exactly the time-reversed of the original by definition of cross-correlation. Since the identification of the waves only relies upon the variations of the travel time with distance, this choice has no consequence. On the other hand, Figure 4 exhibits a strong asymmetry of the cross-correlation time functions. One must remember that theoretically we expect to see both causal (retarded) and anti-causal (advanced) parts of the Green function. Nevertheless we observe that for most station couples, a single direction of time is favored. A similar observation was made by [Campillo and Paul \(2003\)](#) in Mexico. They used earthquakes along the subduction and found that the cross-correlation functions are asymmetrical for stations inland with an orientation perpendicular to the coast and symmetrical for stations located along the coast within the earthquake source region. They suggested that time asymmetry indicates a preferential direction of flow of the energy of coda waves, a property that could appear as paradoxical in the context of random fields. In the following, we will discuss this issue in relation with multiple scattering and the uneven distribution of epicenters which are mostly located to the southeast of the network in Alaska.

Let consider the Z/Z correlation profile of Figure 5.27. Using different bandpass filters, we attempted to see whether the level of asymmetry varies with frequency or not. However, the signal-to-noise ratio does not allow any convincing visual comparison. To achieve a more quantitative analysis we performed a slant-stack of the cross-correlations. For each trace, the arrival time of the Rayleigh wave was measured in the positive times, where by construction the largest amplitude is found. We then shifted the traces of the time of the maximum and stacked all the arrivals in the positive times. We stacked the signals in the negative times in the same way using time shifts opposite to the ones measured in

the positive times. This operation enhances the coherent arrivals and takes into account the variations of wave velocity among the different paths. Finally we computed the ratio between the maximum amplitude of the stacked Rayleigh pulses in the positive time to the maximum amplitude of the stack in the negative time. The stacks were performed for all traces corresponding to interstation distances between 20 and 120 km which have the best signal-to-noise ratio. This processing was applied to the sections of the Z/Z correlation profile of Figure 4 after band-pass filtering. We obtained an amplitude ratio of 3.8 in the band 0.12-0.3 Hz and 4.0 in the band 0.08-0.15 Hz indicating that the symmetry is slightly stronger for high frequency.

However, we also expect the late coda to behave differently from the early coda. Due to anelastic absorption, the early coda includes more high frequencies. As a consequence, the influences of both lapse time and frequency on the symmetry are mixed up in this analysis when we consider cross-correlations computed on the whole coda length.

To clarify this point, we studied the dependence of the causal to anticausal amplitude ratio with the lapse time in the coda window. We formulate as a first order hypothesis that the larger the lapse time, the more isotropic the coda. According to this argument, we expect the correlations computed in later time windows to be more symmetric in time since the corresponding diffuse wave field is more isotropic and all directions of propagation are closer to be equally represented. To verify the reality of this effect, we compared the amplitude ratio of positive and negative times for correlations computed for different lapse times and the same two frequency bands as before. We considered first the correlations computed from the first 300 s of coda (early coda) filtered in the low frequency band (0.08 – 0.15 Hz). We found a ratio of stacked amplitudes of 5.6. We repeated the measurement for correlations computed from record windows starting 300 s after the beginning of the coda (late coda). The amplitude ratio between the causal and anticausal signals is 3.9. This indicates that the correlations are more symmetrical when measured from the late coda than from the early coda. In other words, the longer time the scattered waves propagate, the more isotropic they are.

We performed the same analysis in the band 0.12 – 0.3 Hz. For the early coda the amplitude ratio is 4.3 while it is 3.1 in the late coda. This confirms that the pulses emerging from the cross-correlations of the late coda are more symmetric in time than those computed from the early coda. Comparing ratios obtained in the two frequency bands, we find that the values are smaller for the band 0.12 – 0.3 Hz than for 0.08 – 0.15 Hz. This indicates that the high frequency waves are evolving faster toward isotropy. In the following, we investigate theoretically and from numerical simulations what is the expected evolution of the net flux of energy with time along a seismogram and if this evolution accounts for the observations.

Multiple Scattering and Isotropy

In this section, we discuss quantitatively the impact of the anisotropy of energy flux on the time asymmetry of the Green function recovered by cross-correlations. For sake of simplicity, we consider the theory for scalar waves. The results are not expected to be different for the energy of elastic waves as it will be discussed later. The angular distribution of energy at position \mathbf{R} and time t is described by a specific intensity $I_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{p}}, t)$ defined as the energy flux in space direction $\hat{\mathbf{p}}$ per unit solid angle. The specific intensity is the solution of a radiative transfer equation, which can be derived from an ensemble average of the wave equation [Weaver (1990); Ryzhik et al. (1996)]. The radiative transfer equation is a local detailed energy balance which describes the transport of energy through a multiple scattering medium. In general, it is an integro-differential equation that can only be solved numerically. However, after many scattering events, the initial distribution of energy in phase space tends to be homogenized, which implies that the angular dependence of the specific intensity departs only slightly from isotropy.

When this assumption is valid, I can be expanded as follows :

$$I_{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{p}}, t) = \frac{1}{4\pi} [\rho(\mathbf{R}, \tau) + 3\mathbf{J}(\mathbf{R}, \tau) \cdot \hat{\mathbf{p}} + \dots] \quad (5.13)$$

where ρ denotes the energy density, and \mathbf{J} is the energy current vector which points in the direction of maximum energy flow. The dots denote higher order multipoles that are neglected. Equation (4) forms the basis of the diffusion approximation, which should apply at $t \gg \tau^*$, where τ^* denotes the transport mean free time. We introduce the "ideal" field-to-field correlation function C between two stations located at $\mathbf{R} + \mathbf{r}/2$ and $\mathbf{R} - \mathbf{r}/2$:

$$C_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2, t + \tau/2) u^*(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2, t - \tau/2) dt \quad (5.14)$$

where \mathbf{R} represents the mean distance between source and stations and \mathbf{r} the interstation distance. The diffusion approximation can be used to derive an asymptotic ($t \rightarrow \infty$) relation between C and the ensemble average Green function of the medium [van Tiggelen, 2003] :

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, \tau) = & \rho(\mathbf{R}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\langle G_B(\mathbf{r}, \tau) \rangle - \langle G_B(\mathbf{r}, -\tau) \rangle] \\ & - 3\mathbf{J}(\mathbf{R}, \tau) \cdot \vec{\nabla} [\langle G_B(\mathbf{r}, \tau) \rangle - \langle G_B(\mathbf{r}, -\tau) \rangle] \end{aligned} \quad (5.15)$$

In 5.15 brackets $\langle \cdot \rangle$ denote an ensemble average, and G_B is the retarded causal Green function filtered in frequency band B . Equation 5.15 applies to ensemble averaged quantities only, and is therefore not expected to apply strictly in the seismological case. However, it establishes a relatively simple relation between the field-to-field correlation function from a single source and partial derivatives of the (time-symmetric) Green function.

It can be inferred that the partial derivatives ∂_τ and $\partial_{\mathbf{r}}$ acting on the brackets $[\cdot]$ yield even

and odd functions of time respectively. Thus, as long as the dipolar (J) and isotropic (ρ) terms are of the same order, a time asymmetry is expected to persist.

In the diffusive regime, the energy density is the solution of a simple diffusion equation :

$$\partial_t \rho(\mathbf{R}, t) - D \Delta \rho(\mathbf{R}, t) = \delta(t) \delta(\mathbf{R}) \quad (5.16)$$

and is related to the energy current by Fourier's law :

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}, t) = -D \overrightarrow{\nabla} \rho(\mathbf{R}, t) \quad (5.17)$$

D is the diffusion constant of the waves and is related to the transport mean free time τ^* as follows :

$$D = v^2 \tau^* / 3 \quad (5.18)$$

In equation 5.16 the delta functions represent idealized source terms for small earthquakes. Note that equations 5.16 and 5.17 are valid for coupled elastic waves. In that case, ρ must be interpreted as the sum of P and S energy densities and relation 5.18 takes a more complex form [Turner \(1998\)](#). For scalar waves in a simple infinite scattering medium with homogeneous background, the diffusion equation is easily solved, and the ratio Γ between the causal and anti-causal parts of the correlation function can be written as [[Malcolm et al. \(2004\)](#)] :

$$\Gamma(\mathbf{R}, t) = \frac{1 + 3R/2vt}{1 - 3R/2vt} \quad (5.19)$$

This relation is easily obtained by noting that $J/\rho = R/2t$ and $\partial_r = v \partial_\tau$ for a propagating wave of the general form $h(t - R/v)$. Equation 5.19 shows that for a single source the convergence of the ideal correlation function toward time symmetry is algebraic, of order t^{-1} only. This result has to be used with some caution since it relies on the assumption that the angular dependence of the specific intensity can be described by equation 5.13.

To assess the range of validity of this expansion, we solved numerically the full elastic radiative transfer equation using the Monte Carlo method of [Margerin et al. \(2000\)](#). Our analysis is limited to elastic body waves in an infinite space. The code previously developed to evaluate energy densities has been adapted to calculate the angular distribution of flux. Numerical solutions of the transport equations and analytical results of the diffusion approximation are shown in Figure 5.29. The medium is composed of spherical inclusions with slight (5%) deviations of density, and P and S velocities from the homogeneous background. The product of shear wavenumber and sphere radius is $k_s a \approx 2$. The scattering mean free time of shear waves is roughly 8 s and the detector is located 80 km away from a point-like shear source. Figure 5.29a demonstrates the rapid mixing of P and S modes. After about 50 s (six mean free times), the P to S energy ratio has stabilized. However, Figure 6b shows that the energy flux is strongly anisotropic at the same lapse time : the

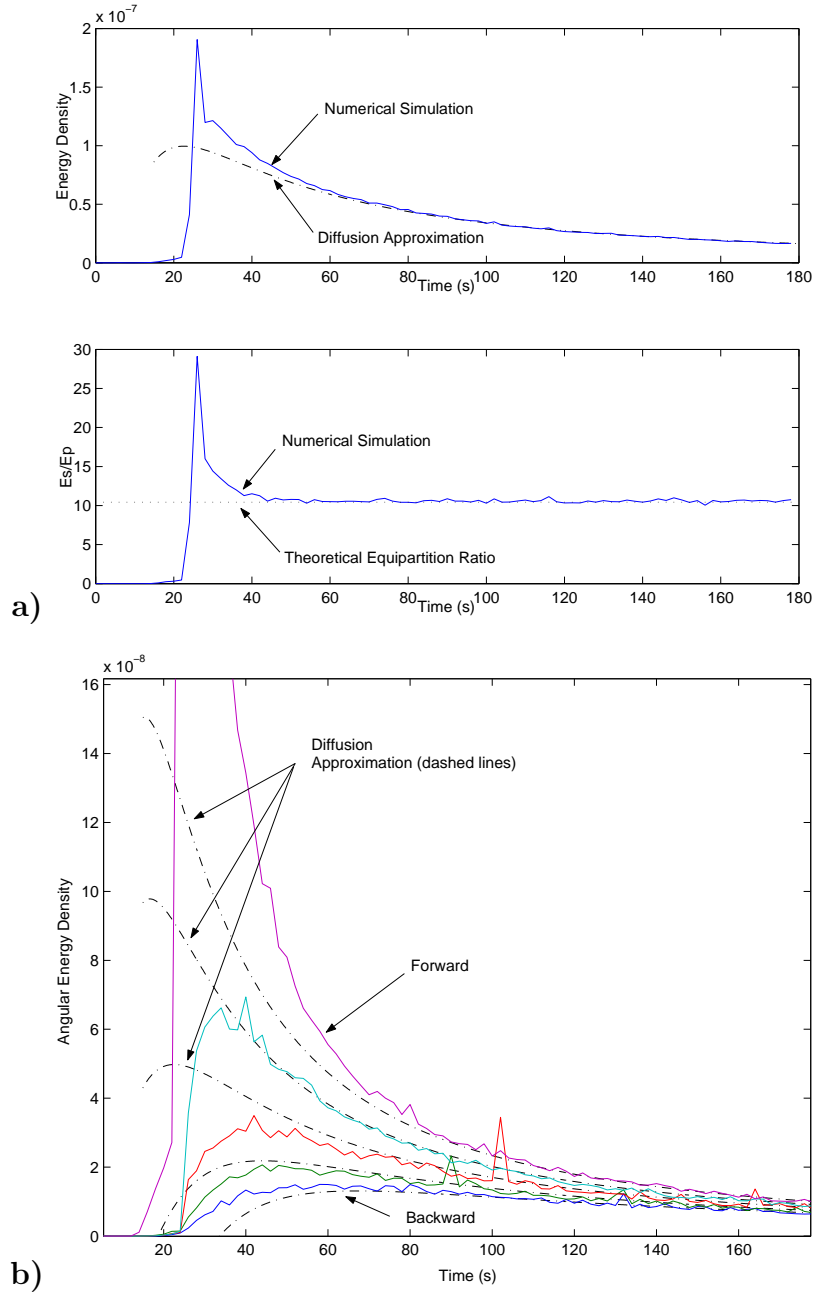


FIG. 5.29 – Comparison between numerical (Monte Carlo) solutions of the radiative transfer equation, and analytical solutions of the diffusion equation. a) Energy density (top) and P to S energy ratio. b) Angular distribution of elastic energy flux. The dashed and solid lines show the results of the diffusion approximation and radiative transfer equation respectively. The energy flux decreases monotonically from $\theta = 0$ (forward direction) to $\theta = \pi$ (backward direction), where θ denotes the angle between the propagation direction and the source-observer vector. The results for $\theta = \pi/4$, $\pi/2$ and $3\pi/4$ are also plotted.

ratio between forward and backward fluxes is still larger than 4. It is therefore important to carefully make the distinction between the stabilization of the P to S energy ratio, the validity of the diffusion approximation, and equipartition.

In the equipartition regime, all directions of propagation and all polarizations are supposed to be equally represented. Under these conditions, the theoretical value of energy ratio $\beta^3/2\alpha^3$ (where β and α denote the shear and compression velocities) can be obtained from a simple mode counting argument [Weaver, 1982]. Note that this result is only valid for a full homogeneous open space and can be generalized to the case of the half-space [Weaver, 1985; Hennino et al., 2001]. Figure 6 shows that the anisotropy of the field remains at very large times and therefore that equipartition occurs asymptotically ($t \rightarrow \infty$). On the contrary, the P to S energy ratio stabilizes at the theoretical value $\beta^3/2\alpha^3$ for a finite time. At this stabilization time, the diffusion approximation wrongly predicts both energy density and flux anisotropy. After about 100 s, radiative transfer and diffusion theory agree extremely well but the residual anisotropy of intensity is still of the order of 2 and decays algebraically as predicted by equation 5.19.

The total energy density is correctly predicted by the diffusion approximation only when the dipolar term describes with sufficient accuracy the anisotropy of the specific intensity. The calculations prove :

1. that the stabilization of the P to S energy ratio is a rapid phenomenon ;
2. that it does not imply isotropy of the wave field ;
3. that the diffusion approximation may largely underestimate the anisotropy of the energy flux, even in the multiple scattering regime.

It is important to notice here that formal equipartition would imply perfect isotropy (all modes, i.e. directions, equally represented). The stabilization of the P to S ratio occurs before the equipartition which is the asymptotic behavior of diffuse waves for large times. Therefore, one may expect large time asymmetries of the field-to-field correlation functions as shown by equation 5.19, provided the sources are located in the same distant region. The asymmetry is expected to disappear both in the average cross-correlations of late coda signals, or with an isotropic distribution of sources around the seismic network. In the latter case, each source produces an asymmetric correlation function but the antisymmetric terms from many sources are expected to average out.

We return to the numerical experiments with the wave equation to illustrate the effect of a non-homogeneous distribution of sources. The conditions of computation are similar to those used to produce Figure 1 but we now consider a configuration which mimics a set of earthquakes along a fault. 40 sources S are aligned in the x -axis direction along a 400-km-long segment located 450 km away from the receivers as depicted in Figure 5.30. We use the same weakly scattering medium as in Figure 5.24.

Snapshots of the correlation function are presented in Figure 5.30b for time $t = -30$ s, 5.30c for $t = 0$ s, and 5.30d for $t = 30$ s. For $t < 0$, the wavefront is only reconstructed in the direction of the sources S , corresponding to the anti-causal part of the Green function.

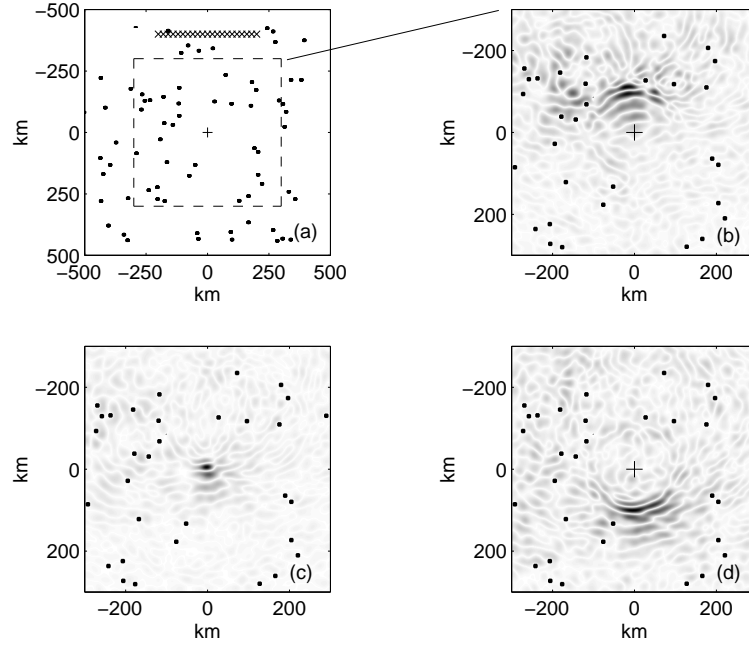


FIG. 5.30 – Numerical simulation of the asymmetry of the reconstructed Green function. a) 40 sources S are aligned along the x axis (crosses). The reference point is at the center of the plot, indicated by a "+". (b) Snapshot of the cross-correlation between the field in A with the one at location (x, y) after averaging over the sources S for correlation time -30 s. The converging wavefront is only partially reconstructed in the direction of the sources. (c) Snapshot for correlation time $t = 0$ s : the wavefront is focused on A . Note the high level of remaining fluctuations. (d) Snapshot for $t = 30$ s : the diverging wavefront is defined only in the direction opposite to the source region.

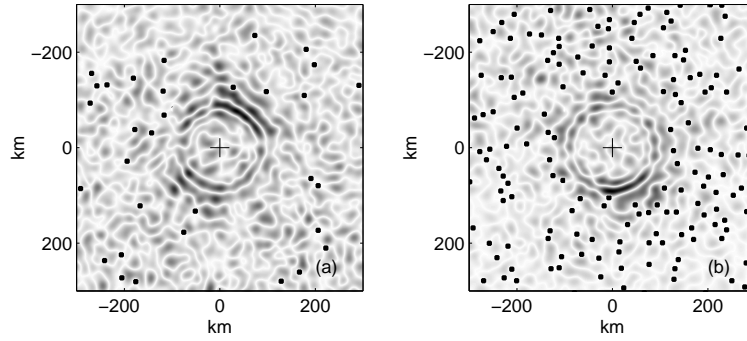


FIG. 5.31 – a) Same experiment as in Figure 5.30 for time $t = -30$ s in the weakly diffusive medium. Only the late coda was processed, corresponding to lapse times larger than the mean free time. This part of the acoustic signal is made of multiply scattered waves propagating in all directions. The wavefront converges to A . Once again diffusion has restored the wavefront isotropy and the time-symmetry of the Green function. (b) Same experiment as in Figure 5.30 for time $t = -30$ s for a strongly scattering medium with mean free path $l^* = 120$ km. The converging wavefront is isotropic and therefore the time symmetry of the Green function is restored.

For $t > 0$, only the causal part of the Green function is reconstructed in the region opposite to the sources.

This numerical experiment confirms that the spatial distribution of the sources controls the time symmetry of the correlations. If the source distribution is asymmetric, the time-symmetry of the correlations can be broken. This is particularly true in weakly scattering (or homogeneous) media. This can be understood as well in terms of the time-reversal analogy. The uneven distribution of earthquakes in a limited region has a similar effect as a limited aperture of a time-reversal mirror.

At long lapse time, the field becomes diffuse and the argument given above (equation 5.19) holds. We therefore expect that even with an inhomogeneous distribution of sources, scattering restores the broken time symmetry of the correlations. We checked this expectation with the same numerical experiment as before, but we correlated only the waves of the late coda. Late times in the coda are defined as $t > t^*$, where t^* is the mean free time, that is the mean free path divided by the velocity. After t^* , the waves have traveled more than l^* and the field is evolving toward isotropy. The result is shown in Figure 5.31a and proves that the time symmetry of the correlations is restored by using large enough lapse times.

As a consequence of the discussion above on the isotropization of the field, we expect stronger scattering to improve the reconstruction of the Green function even for an inhomogeneous distribution of sources. This effect was already confirmed by laboratory

experiments [Deroode *et al.* (2003a)]. We performed numerical simulations in a strongly scattering medium (Figure 5.31b) and processed the complete coda window. Again, the converging wavefront is clearly symmetric despite the uneven distribution of sources, unlike what we observed in the same conditions of computation with a weakly scattering medium (Figure 5.30).

In our experiments on real earthquake records in Alaska, we observed a clear temporal asymmetry of the cross-correlation functions (Figure 5.27). It shows that the forward flux dominates and that the excitation of the propagation modes that make up the diffuse field is anisotropic. Indeed the earthquakes we used are concentrated in the southeast of the center of the network as shown by Figure 5.25. Due to absorption and noise, the coda records are not long enough to reach the isotropy of the diffuse field. The resulting average flux of energy is responsible for the observed time asymmetry of the cross-correlation.

Besides the question of the source distribution, the distribution of scatterers can be a source of time asymmetry as well. In the case of an inhomogeneous distribution of scatterers, one may expect preferential directions of arrival of scattered waves. As discussed above, and whatever its origin, such an anisotropy of the energy flow results in a temporal asymmetry of the correlations.

5.4.5 Conclusion

The stacked cross-correlations between coda records of regional earthquakes in Alaska display propagating deterministic wave trains. We showed numerical simulations of wave propagation to illustrate the principles of the reconstruction of the Green function from field-to-field correlations. An analogy with a time reversal experiment makes more intuitive the interpretation of the reconstruction in terms of physical propagation of the waves. The prominent arrivals that can be identified from the data set correspond to Love and Rayleigh waves as expected for the Green function between two points at the free surface. The emergence of the Green function is clearer at low frequency ($0.1 - 0.3$ Hz) than at higher frequency. The reconstructed signals can be observed for positive and negative correlation times which correspond to the causal (retarded) and anticausal (advanced) Green functions expected theoretically. The analysis of correlation functions is thus a proper way to observe the anticausal Green function, usually absent in experiments. However, the correlations exhibit a clear time asymmetry. We propose that it is a consequence of the non-isotropic nature of diffusive wave fields at finite lapse times. To prove this assertion, we studied the relation between the transition toward diffusion and the apparition of stabilization of P to S energy ratio. The numerical experiments with the elastic radiative transfer equation show that the P to S energy ratio stabilizes rapidly, much before the field becomes isotropic. It is nevertheless a good indicator that the field energy is governed by a diffusion equation. The formal state of equipartition is reached only for asymptotically large lapse times when isotropy of the field is achieved. Numerical experiments also show that at finite times, the rupture of time symmetry is related to the uncomplete azimuthal distribution of sources.

The relative amplitude of causal and anti-causal waves, and its evolution with time, can be used to measure scattering properties of the medium such as transport mean free path. The extraction of Green functions from coda waves makes new types of measurements with seismic waves possible. They can be performed along paths between stations that could not be obtained with the ballistic waves from earthquakes. Therefore, they could contribute to improve significantly the resolution of seismic images.

Chapitre 6

Application des corrélations à l’Imagerie Passive

Dans ce chapitre, la technique d’imagerie passive par corrélation est appliquée dans différents domaines et avec divers objectifs :

1. en ultrason en milieu diffusant, pour faire l’image tomographique d’un milieu stratifié (section 6.1) ;
2. en ultrason en milieu diffusant, pour faire l’image en réflexion d’une interface (section 6.2) ;
3. en ultrason en milieu homogène, pour faire l’image de diffuseurs isolés (section 6.2) ;
4. en sismologie avec du bruit ambiant, pour faire l’image du sous-sol lunaire (section 6.3) ;

6.1 Imaging from one-bit correlations of wideband diffuse wave fields

Eric Larose, Arnaud Derode, Michel Campillo, Mathias Fink.
Publié dans *Journal of Applied Physics*.

Abstract :

We present an imaging technique based on correlations of a multiply scattered wave field. Usually the Green’s function h_{AB} between two points (A, B) is determined by direct transmit/receive measurement. When this is impossible, one can exploit an other idea : if A and B are both passive sensors, h_{AB} can be retrieved from the cross correlation of the fields received in A and B , the wave field being generated either by deterministic sources or by random noise. The validity of the technique is supported by a physical argument based on time-reversal invariance. Though the principle is applicable to all kinds of waves, it is illustrated here by experiments performed with ultrasound in the MHz

range. A short ultrasonic pulse, sent through a highly scattering slab, generates a randomly scattered field. Behind the slab is the medium to image : it consists of four liquid layers with different sound speeds. The cross correlation of the field received on passive sensors located within the medium is used to estimate the speed of sound. The experimental results show that the sound-speed profile of the layered medium can be precisely imaged. We emphasize the role of wideband multiple scattering and of source averaging in the efficiency of the method, as well as the benefit of performing one-bit correlations. Applications to seismology are discussed.

6.1.1 Introduction

The physics of wave propagation in complex media covers various areas of research, ranging from quantum mechanics to classical waves like optics [*Berkovits and Feng* (1994); *van Rossum and Nieuwenhuizen* (1999); *Sheng* (1995); *Scheffold and Maret* (1998); *Heckmeier et al.* (1997); *Van Albada and Lagendijk* (1985); *Wolf and Maret* (1985)], ultrasound [*Tourin et al.* (1997); *Cowan et al.* (2000)], seismology [*Aki and Chouet* (1975); *Hennino et al.* (2001)], astrophysics, or ocean acoustics [*Duvall et al.* (1993); *Roux et al.* (2004)]. This diversity gave rise to fruitful transdisciplinary approaches. From the 1980's on, huge improvements have been achieved in understanding and modeling wave propagation in inhomogeneous, random, or reverberant media. Many domains of applications are concerned, e.g., imaging [*Fink et al.* (2002)], detection, or communication [*Derode et al.* (2003c)] in a complex environment. Usually, the first, essential step is to know the Green's function of the medium under investigation. When possible, the Green's function (or impulse response) h_{AB} between two points A and B is determined by a direct transmit/receive measurement.

When a wave propagates through a scattering medium, it progressively loses its coherence. The energy of the coherent part of the wave is converted to scattered waves that follow longer scattering paths. In seismology, these long-lasting waves constitute the coda [*Aki and Chouet* (1975)] that can be observed in seismograms. Coda waves are not random noise : they are the deterministic signatures of the heterogeneities of the Earth's crust. Particularly, between 1 and 10 Hz , the coda waveforms show clear evidence of strong multiple scattering [*Hennino et al.* (2001)]. Mesoscopic physicists have introduced one parameter to characterize the importance of scattering : the transport mean free path ℓ^* . Very roughly, ℓ^* is the distance after which the wave forgets its initial direction. When the distance of propagation is significantly larger than ℓ^* , the attenuation due to scattering strongly reduces the direct coherent wave while the order of multiple scattering increases, which complicates the Green's function h_{AB} and makes conventional imaging very difficult. The cancellation of the direct waves due to multiple scattering has long been considered as a dramatic loss of information.

From a theoretical point of view, one way to analyze diffuse waves is to study ensemble-

averaged quantities, e.g., try to fit the decay of energy in the coda by a diffusion or radiative transfer model. However, in seismology as well as in ultrasonics, what the sensors record is the actual wave field, both in amplitude and phase, on a given realization of disorder (there is only one Earth!). Even if the interpretation of the true wave field is much more complicated, the coda retains "deterministic information". In this article, we address the problem of imaging a heterogeneous medium by retrieving the Green's function h_{AB} from the correlation of coda waves.

Within the last 2 decades, strong attention was paid to correlation of scattered waves. In optics, short- and longrange intensity correlations of speckle patterns were thoroughly investigated [*Berkovits and Feng* (1994); *van Rossum and Nieuwenhuizen* (1999); *Sheng* (1995)]. Time-varying correlation of scattered fields [*Cowan et al.* (2000); *Poupinet et al.* (1984)] (diffusive wave spectroscopy) have given new insight for monitoring changes in complex media.

Recently, another approach in the correlations of ultrasonic waves was proposed by Weaver and Lobkis [*Lobkis and Weaver* (2001); *Weaver and Lobkis* (2001)] and applied to the case of a reverberant chaotic cavity. Their work stimulated researchers from various areas of wave physics [*Campillo and Paul* (2003); *Derode et al.* (2003b); *Snieder* (2004)]. Weaver and Lobkis showed that when A and B are both passive sensors, the Green's function h_{AB} can be recovered from the cross correlation of the fields received in A and B . Interestingly, the wave fields recorded in A and B could be generated either by deterministic sources or by random noise, like thermal fluctuations. If this idea could be generalized to complex environments other than reverberant chaotic cavities (for instance, open scattering media), it should be fruitfully applied to all areas of wave physics where it is difficult to place a source but easy to place a receiver that records the wave field, and not only its intensity. In seismology, for instance [*Campillo and Paul* (2003)], it is nearly impossible to control elastic sources, but there is a dense network of seismic stations all around the world (except in the oceans). Since earthquakes essentially occur in seismically active regions, many large aseismic areas around the world remain partially unstudied. In those regions, if the "Weaver approach" is applicable to seismic waves, studying the correlation of coda waves should provide a huge amount of impulse response measurements, thus allowing a more precise study of the internal structure of the Earth.

In their pioneering works, Weaver and Lobkis showed it was possible to reconstruct the Green's function using correlation of waves reverberated in an aluminum block. Mathematical arguments were given, based on a discrete modal expansion with random coefficients [*Lobkis and Weaver* (2001); *Weaver and Lobkis* (2001)]. Later, *Derode et al.* (2003b) proposed a physical interpretation of the emergence of the Green's function from the correlation, based on time-reversal invariance, and presented numerical simulations in open and closed multiple scattering media to support the argument. In this paper, we confirm the validity of this approach and show that it is possible to do "passive imaging" from the spatial correlations of the multiply scattered field received on passive sensors through a highly scattering

(and open) medium. First, we recall the simple physical interpretation of the emergence of the Green's function in the correlations, based on reciprocity and time-reversal symmetry, which does not require a modal expansion of the field. Then, we present new experimental results with ultrasound as an example of "small-scale seismology" : we build an image of a layered medium through a highly scattering sample via the correlations of the ultrasonic coda waves. We emphasize the role of wideband multiple scattering and source averaging in the efficiency of the method, and we show the benefit of performing one-bit correlations. We also apply this imaging technique to the case of a slowly changing medium, similarly to diffuse wave spectroscopy (DWS).

6.1.2 Physical argument

Why should the direct Green's function h_{AB} suddenly emerge from spatial correlations of fields received in A and B ? In order to give a physical interpretation of that phenomenon, let us consider two receiving points A and B , and a source S . We will note $h_{IJ}(t)$ as the wave field sensed in I when a Dirac $\delta(t)$ is sent by J . If $e(t)$ is the excitation function in S , then the wave fields Φ_A and Φ_B received in A and B will be $e(t) \otimes h_{AS}(t)$ and $e(t) \otimes h_{BS}(t)$, \otimes representing convolution. The cross correlation C_{AB} of the fields received in A and B is then

$$C_{AB}(\tau) = \int \Phi_A(t) \Phi_B(t + \tau) dt \quad (6.1)$$

$$= h_{AS}(-t) \otimes h_{BS}(t) \otimes f(t) \quad (6.2)$$

with $f(t) = e(t) \otimes e(-t)$. A simple physical argument based on time-reversal (TR) symmetry indicates that the direct Green's function h_{AB} may be entirely retrieved from C_{AB} [*Derode et al.* (2003b)].

As long as the medium does not move (no flow), the propagation is reciprocal, i.e., $h_{IJ}(t) = h_{JI}(t)$. So, when we cross correlate the impulse responses received in A and B , the result $C_{AB}(t)$ is also equal to $h_{SA}(-t) \otimes h_{BS}(t)$. Now, imagine that we do a fictitious TR experiment : A sends a pulse, S records the impulse response $h_{SA}(t)$, time reverses it and sends it back ; the resulting wave field observed in B would then be $h_{SA}(-t) \otimes h_{BS}(t)$ which, because of reciprocity, is exactly the cross correlation $C_{AB}(t)$ of the impulse responses received in A and B when S sends a pulse. So, the result C_{AB} of the "real" experiment (fire in S , cross correlate in A and B) is the same as the result of an imaginary experiment (fire in A , time reverse in S , and observe in B).

We would like the impulse response h_{AB} to appear in this cross correlation. But, in the most general case, C_{AB} has no reason at all to be equal to h_{AB} ! Yet, we can go beyond : imagine now that we use several points S , and that we place them in such a way that they form a so-called "TR cavity" [*Cassereau and Fink* (1992)] : such would be the case if the

sources S were continuously distributed on a surface surrounding A , B , and the heterogeneities of the medium (which is assumed to be free of absorption). Then, no information would be lost during the TR operation. During the "forward" step, at time $t = 0$, A sends a pulse that propagates everywhere in the medium (including in B where the field received is $h_{AB}(t)$), may be scattered many times, and is eventually recorded on every point S , with no loss of energy. After the TR, the wave should exactly go backwards : it should hit B , then refocus on A at time $t = 0$ ¹, which implies that the field received in B (at times $t < 0$) is exactly $h_{AB}(-t)$, the time-reversed version of the Green's function. Once the pulse has refocused on A , it does not stop but diverges again from A and gives rise, at times $t > 0$, to $h_{AB}(t)$ in B . Thus, the exact impulse response $h_{AB}(t)$ can be recovered from either the causal ($t < 0$) or the anticausal part ($t > 0$) of the sum of field-field correlations C_{AB} for all sources (the causality issue is discussed in more detail in Refs. [Derode et al. \(2003a\)](#) and [van Tiggelen \(2003\)](#)).

Such a perfect distribution of sources surrounding sensors A and B has been tested in numerical simulations [[Derode et al. \(2003b\)](#)] where A and B were deep inside the scattering medium : the exact (not ensemble-averaged) Green's function was nearly perfectly retrieved. In real life, whatever the type of waves involved, expecting a perfect distribution of sources is unrealistic for at least two reasons : first the limited number of sources, second their uneven distribution. In seismology, for instance, seismic stations (A, B) record the displacement field at the Earth's surface but the sources (S , the earthquakes) are mostly aligned along faults.

Yet, in the seismic experiment described by [Campillo and Paul \(2003\)](#), it was shown that some features of the elastic Green's function could be retrieved using correlations of the late seismic coda in Mexico, with a limited number (~ 100) of distant earthquakes that were not surrounding the two seismic stations. The Green's function was preferentially reconstructed on one side of the time axis because of a preferential direction of diffuse transport in this source-station configuration.

In order to test and illustrate the possibility of imaging based on the correlation of coda waves with a limited number of sources, we have designed laboratory experiments (Fig. 6.1).

6.1.3 Experiment

The experiments take place in a water tank. We use a 118-element ultrasonic array to simulate 118 "earthquakes" : each time, one of the elements sends a short pulse (3 MHz center frequency) that traverses a highly scattering medium. This medium consists of a random arrangement of vertical steel rods (average density 29.5 rods/cm², diameter 0.8 mm).

¹We have made the change of variable $t \rightarrow t - T$, T being the time necessary for the pulse to propagate and be entirely recorded in every point C . Hence, the refocusing in A takes place at $t = 0$.

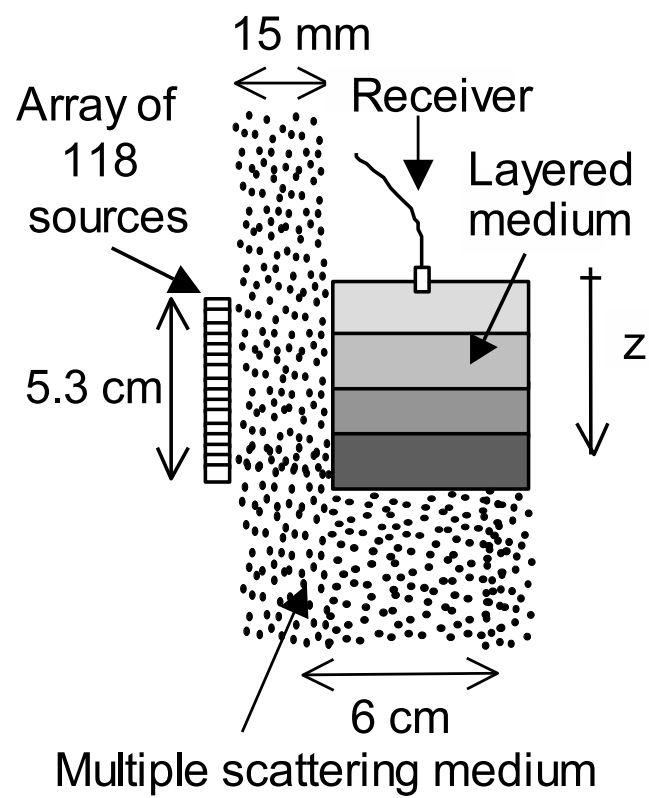


FIG. 6.1 – Experimental setup.

The sample's mean free path is $\ell^* = 3.5 \text{ mm}$ (this was estimated by the coherent backscattering effect [*Tourin et al. (1997)*]), whereas its smallest dimension is 15 mm ; therefore, the waves undergo many scatterings before they can get out of the scattering slab and reach the receiver.

Behind the slab, we place the medium that we want to image : it consists of four liquid layers (alcohol, oil, water, sugar syrup) with different sound speeds. The receiver is a 0.39 mm piezoelectric transducer. It is translated downwards along the z axis, and records the scattered signals that are generated each time one of the elements on the array fires a pulse. Those records are equivalent to seismograms, except they are only made of compressional waves. A typical signal is plotted in Fig. 6.2(a). It lasts more than $300 \mu\text{s}$, i.e., 300 times the initial pulse, and shows a high degree of multiple scattering. It should also be noted that the receiver is facing downwards; therefore, it cannot record direct waves coming from the sources, but purely multiply scattered contributions. Moreover, following the Van Cittert-Zernike theorem and given the typical distances involved here, the spatial coherence of the field measured by the receiver is $\approx \lambda$. No coherent wavefronts are propagating between the receiver's positions. The 118 sources fire successively, and 118 "seismograms" are generated and recorded for each position z of the receiver. The scattered waveforms are $h_{Sz}(t)$, with S the index of the earthquake and z the position of the receiver.

Next, we choose a pair of receiver positions (z_1, z_2) and we cross correlate the field due to the source S

$$C_s(z_1, z_2, t) = h_{Sz_1}(t) \otimes h_{Sz_2}(-t) \quad (6.3)$$

A typical result is shown in Fig. 6.2(b), for $S = 60$, $z_1 = 36 \text{ mm}$, $z_2 = 16 \text{ mm}$. Nothing seems to emerge from the correlation.

Then, we repeat this for the 118 sources and sum the correlations to get

$$C(z_1, z_2, t) = \sum_{S=1}^{118} C_s(z_1, z_2, t) \quad (6.4)$$

A typical result is plotted in Fig. 6.2(c). This time, a strong peak is emerging from the correlation at time $t = -13.6 \mu\text{s}$, corresponding to the time of flight $|z_1 - z_2|/c$. This is the signature of the direct Green's function between z_1 and z_2 . In this example, the distance between the receivers is 20 mm , so from the arrival time $t = -13.6 \mu\text{s}$ we get an estimation of the sound velocity between z_1 and z_2 : $1.47 \text{ mm}/\mu\text{s}$. The peak appears only at negative times and not at positive times due to the location of the receiver, viz. the scatterers and its limited directivity [*Derode et al. (2003a)*] : the receiver only sees what is coming towards it front face.

Here, the sound velocity between z_1 and z_2 could only be estimated because the peak was sufficiently above the surrounding "noise" (actually, this term is improper since it is

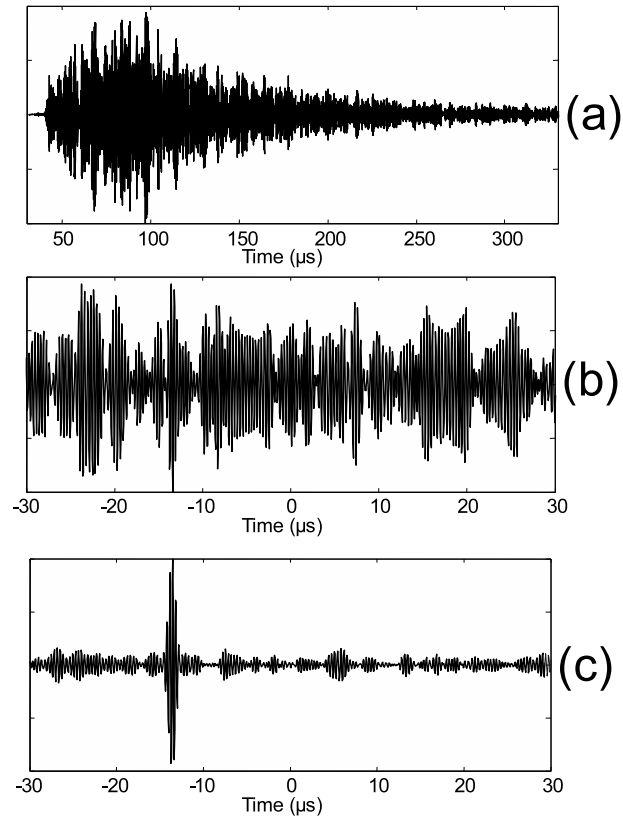


FIG. 6.2 – Typical experimental results. (a) Waveform $h_{60}(z_1 = 36 \text{ mm}, t)$ received by the passive sensor at depth $z_1 = 36 \text{ mm}$ when source #60 fires a pulse. (b) Cross correlation $C_{S=60}(z_1 = 36 \text{ mm}, z_2 = 16 \text{ mm}, t)$. (c) Cross correlation $C(z_1 = 36 \text{ mm}, z_2 = 16 \text{ mm}, t)$ averaged over the 118 sources.

not noise *per se*, but fluctuations of the correlation between the waveforms outside the peak). In order to see the peak emerge from the signals presented in Fig. 6.2, we had to average the cross correlations on a large number of sources (up to 118). The evolution of the signal-to-noise (SNR) ratio in the averaged cross correlation versus the number of sources N is presented in Fig. 6.3. The SNR was calculated as follows. The "signal" level is the value of the envelope of the peak, and the "noise" level is the mean amplitude of the envelope of $C(z_1, z_2, t)$ outside the peak, in a $25 \mu s$ -long time window. As the number N of sources increased, the peak emerges more and more. The SNR seems to grow like $N^{0.4}$, whereas a classical $N^{0.5}$ dependence would have been expected. This indicates that the contributions from different sources are not fully decorrelated (indeed, the array pitch is slightly smaller than the wavelength) and/or do not contribute equally to the signal, but the range of N is too small to conclude that the exponent 0.4 is really meaningful.

Even though the sources were not arranged as a perfect time-reversal device, the experimental results show that the main feature of the direct Green's function can be retrieved from the correlations. This is achieved thanks to multiple scattering in the random sample. Once again we can refer to the TR analogy. As we have argued, in a time-reversal experiment, there is a forward step (propagation from A to B , record the field in S) and a backward step (time reverse and send back the field in S , observation of the resulting field at point B). If the time reversal could be perfect, then the backward step would be identical to the forward step. Similarly, the key question to the retrieval of the Green's function is : if this was a TR experiment, would the backward step be identical to the forward step? Of course, this is almost never the case, except in a thought experiment. But, past experiments have already shown that time-reversal focusing is more efficient (i.e., the backward step and the forward step are more alike) in the presence of strong multiple scattering or reverberation [Derode *et al.* (2001b); Blomgren *et al.* (2002); Draeger and Fink (1999); Fink *et al.* (2000)] : the focused peak is narrower in space, indicating that the angular spectrum of the wave field is precisely recovered. Strong multiple scattering or reverberation virtually enhance the size of a TR device, i.e., the number of sources involved.

Interestingly, this technique also works with one-bit correlations : instead of recording the entire waveforms $h_{Sz}(t)$, we only record and cross correlate their sign, i.e., a series of $+1/-1$ as shown in Fig. 6.4. And, one-bit correlations seem to give even better results than "normal" correlations [see Figs. 6.2(b) and 6.4(b) for a comparison]. Again, it was already shown [Derode *et al.* (1999); Montaldo *et al.* (2002)] that one-bit time reversal in a multiple scattering or reverberating medium gives a higher SNR than a classical time reversal since it gives more importance to the longest scattering paths, thus artificially reinforcing multiple scattering. Of course, the benefit of one-bit correlation will only be effective if the recording time is significantly larger than the decay time of the multiply scattered signals. For a multiple scattering slab with thickness L , the typical decay time is the "Thouless time" L^2/D , with D the diffusion constant (here, $D \approx 2.6 \text{ mm}^2/\mu s$). As long as the recording time is larger than the Thouless time, the effect of one-bit digitization is to reinforce the weight of the longest and most diffracted scattering paths relatively to

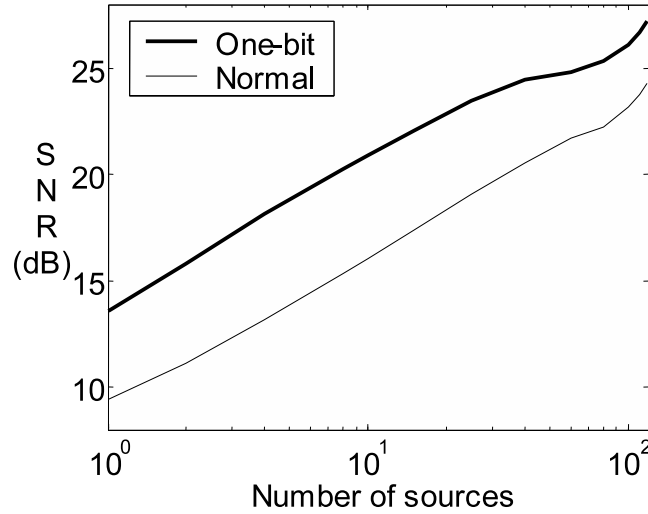


FIG. 6.3 – Experimental results for the evolution of the signal-to-noise ratio (in dB) versus the number of sources. The thick line stands for the one-bit correlations, the thin one for "normal" correlations. The observation points were in $z_1 = 36 \text{ mm}$ and $z_2 = 16 \text{ mm}$.

early arrivals. Experimental results show the interest of one-bit correlations : in Fig. 6.3, the SNR is systematically higher by $\approx 4 \text{ dB}$ with one-bit correlation ; therefore, a smaller number of sources can be employed which is interesting for any practical implementation of the method.

It should also be noted that the retrieval of the Green's function takes advantage of the large frequency bandwidth available in pulsed ultrasound (here, the spectrum spans from 2 to 4 MHz). Suppose we had only one source, working in a narrow frequency band : then, the retrieval of the Green's function would completely fail. Once again, the time-reversal analogy is enlightening. Indeed, in a one-channel time-reversal experiment performed in a multiple scattering medium on a single realization of disorder, focusing cannot be achieved if the frequency band is too narrow [Derode *et al.* (2001b)] : the reemission of the phase-conjugated monochromatic wave just creates a speckle pattern that is not focused back at the source. However, as the frequency bandwidth $\Delta\omega$ is progressively enlarged, it has been shown that a TR device manages to refocus the wave through the multiple scattering slab, even with only one source [Derode *et al.* (2001b); Blomgren *et al.* (2002); Draeger and Fink (1999)]. The underlying idea is that we take advantage of frequency averaging as soon as the bandwidth $\Delta\omega$ is larger than the correlation frequency $\delta\omega$ of the scattering medium. In a homogeneous and lossless medium, $\delta\omega \ll \Delta\omega$. But, in a multiple scattering slab, the correlation frequency $\Delta\omega$ is inversely proportional to the Thouless time ($\Delta\omega$ is also often referred to as the Thouless frequency). Since there are roughly $\Delta\omega/\delta\omega$ "decorrelated frequencies" available in the spectrum, the SNR can be expected to rise as $\sqrt{\Delta\omega/\delta\omega}$, if the power spectral density is flat. Hence, using a large frequency bandwidth is another way of

increasing the SNR. This is illustrated in Fig. 6.5, where the SNR has been plotted versus the number of elements and versus the bandwidth. The proportion α of energy within a frequency band (ω_1, ω_2) is denoted by

$$\alpha = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S(\omega) d\omega} \quad (6.5)$$

with $S(\omega)$ the power spectral density of the scattered signals. In Fig. 6.5, the bandwidths are indicated by the values of α .

However, it should be noted that enlarging the frequency band cannot do miracles ; in particular, it cannot really replace source averaging. If we want to retrieve all the details of the *exact* Green's function, the only solution is to have sources surrounding the medium. But, if we are satisfied with a simple estimation of the first arrival of the Greens' function, then enlarging the frequency band helps, because it increases the peak-to-noise ratio, at least as long as dispersion in the medium to be imaged between z_1 and z_2 can be neglected. A different approach consists of extending the bandwidth to infinity ($\Delta\omega \gg \delta\omega$) and invoking a self-averaging property to retrieve an ensemble-averaged Green's function with a single source [*van Tiggelen* (2003)]. Naturally, this only holds if the ensemble-averaged Green's function itself does not depend on frequency (i.e., the scattered wave field expressed as a function of frequency has to be a stationary, or even ergodic, random process) so that an ensemble average can be replaced by a frequency average.

As a preliminary conclusion, the time-reversal analogy indicates that in order to retrieve the *exact* Green's function from the correlations, the sources of the "earthquakes" should be placed in such a way that they completely surround the medium and the sensors. But, the time-reversal analogy (based on previous works on time reversal) also indicate that when this condition cannot be fulfilled, one can still estimate the main features of the Green's function (at least an arrival time) using several tricks :

1. take advantage of a multiple scattering medium ;
2. use a frequency bandwidth significantly larger than the correlation frequency of the scattering medium ;
3. digitize the waveforms over a single bit ;
4. average the results over all available sources. This is what was done in Fig. 6.4 to retrieve the arrival time of the direct Green's function between the two observing points located at $z_1 = 36 \text{ mm}$ and $z_2 = 16 \text{ mm}$.

Now, we can repeat the same procedure for every pair of neighboring observation points (z_1, z_2) , and estimate the velocity profile (i.e., build an image) of the layered medium (Fig. 6.6). We have done so all along the vertical axis, with a displacement step of 2 mm . Note that, at room temperature, it is difficult to distinguish between the water and the oil layers, since their estimated velocities are 1478 and 1472 m/s , respectively. Yet interestingly, if we repeat the experiment after heating the sample by 8°C , we see that the measured

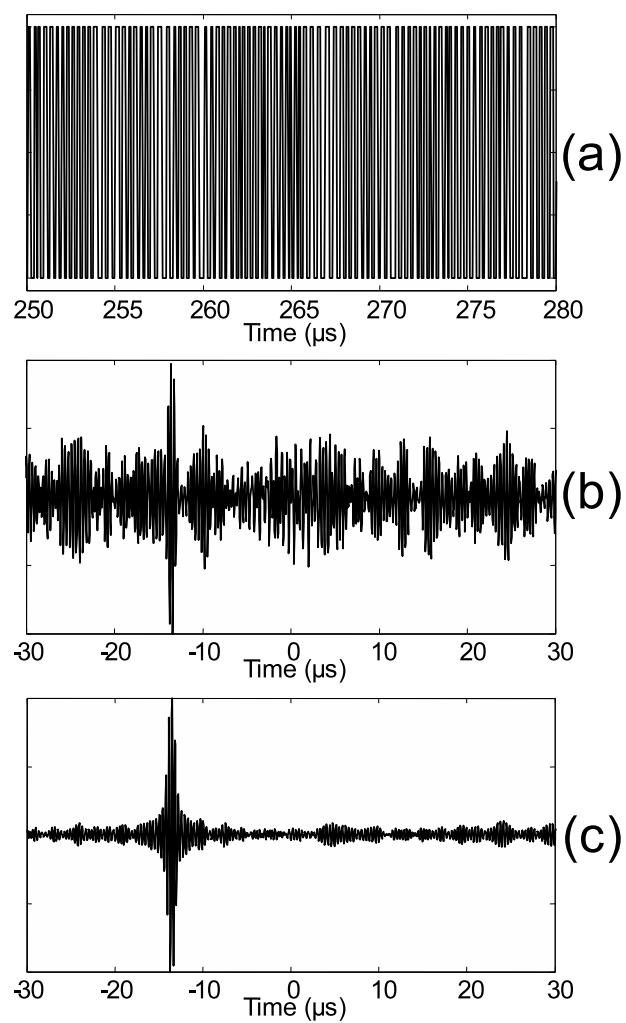


FIG. 6.4 – Same as Fig. 6.2, except that only the sign (+1/−1) of the scattered wave forms has been recorded and cross correlated ("one-bit" correlations).

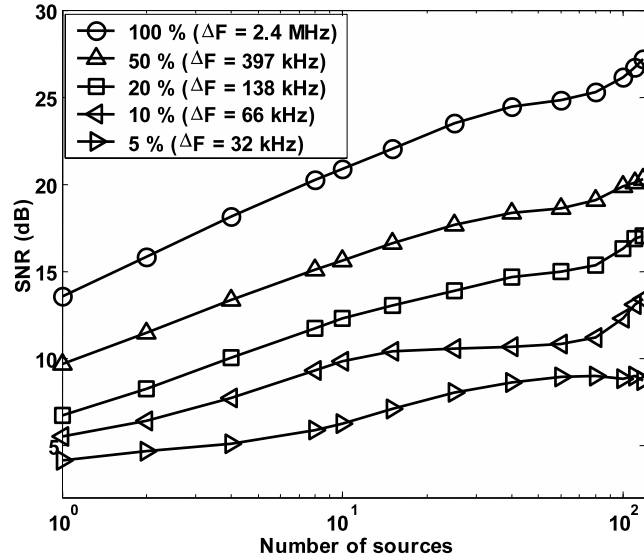


FIG. 6.5 – Experimental results for the evolution of the signal-to-noise ratio (in dB) versus the number of sources for different frequency bandwidths. The observation points were in $z_1 = 36\text{ mm}$ and $z_2 = 16\text{ mm}$. The scattered waveforms were one-bit digitized. The central frequency is 2.9 MHz . The frequency bandwidth Δf is indicated in the legend, as well as α the percentage of energy within each frequency band.

velocity of the water layer increases to 1492 m/s , whereas that of the oil layer decreases to 1444 m/s , which is consistent with what is known from these two liquids, and the two layers are better separated on the profile (Fig. 6.6). The velocities estimated by "passive imaging" were found to coincide with those obtained by direct pulse-echo measurements in the four liquids within 2%.

The same experimental procedure was also applied to a two-layer medium (oil/sugar syrup). Initially the liquids are at rest, and the image of velocity profile clearly shows the two layers (Fig. 6.7). Then, the medium is scrambled to form an emulsion : the velocity profile we obtain shows an apparently homogeneous medium with a sound speed of $1.57\text{ mm}/\mu\text{s}$. The experiment is repeated on the same sample while the two liquids progressively separate one from the other. After 12 h the separation is complete. Thus, the images obtained from correlation of the scattered fields were able to monitor the evolution of a medium undergoing a slow structural change. This amounts to "passive diffusive wave spectroscopy", in analogy with DWS (diffusive wave spectroscopy) or coda wave interferometry [Snieder *et al.* (2002); Roberts *et al.* (1992)]. However, in the situation depicted here, the change in the scattered wave fields is not due to a movement of the scatterers, but to a change in the medium we image through the scatterers.

6.1.4 Conclusion

We presented a "passive imaging" technique based on correlations of highly scattered waves in an open medium. The first step of the imaging process is to retrieve the Green's function between two passive sensors from the correlation of the scattered wave fields generated by distant sources. We have proposed a physical interpretation of the emergence of the direct Green's function from the correlations of highly scattered wave fields. This interpretation is based on time-reversal symmetry. It does not require a modal decomposition of the wave field, nor the rigorous equipartition of energy between discrete random modes. Using this time-reversal analogy, we showed it was necessary to use several sources surrounding the passive sensors in order to retrieve perfectly the exact Green's function. This was called the TR criterion. Moreover, the analogy also tells us that when the TR criterion is only partially fulfilled, multiple scattering helps achieving a correct estimation of the arrival time of the Green's function. It was also shown that one-bit correlations (i.e., we only process the sign of the wave field) can give similar estimations with fewer sources, because one-bit processing tends to give more weight to the longest and most diffracted paths, which enhances the role of multiple scattering. The importance of the frequency bandwidth relatively to the correlation frequency of the medium was also emphasized. Two ultrasonic experiments were presented in the paper in order to illustrate the feasibility of passive imaging with wideband one-bit correlations. The first one consisted of imaging a layered medium : we measured the local sound velocities along the profile ; the estimated error was less than 2%. The effect of an 8°C heating was quantitatively observed. In the second experiment we monitored the progressive separation of a two-phase mixture (oil/syrup emulsion). In both experiments, ultrasonic wave fields were created by distant sources and underwent strong multiple scattering before they reached the medium to image.

Much attention is now paid to real seismic data [[Campillo and Paul \(2003\)](#)], where this passive imaging method should provide an efficient tool to improve classical seismic images. Using the passive "coda correlation" method, we would be able to retrieve the Green's function between seismic stations everywhere around the world.

More generally, whatever the types of waves involved, this technique should be applicable to any kind of wave and in every situation where it is hard to control the source but easy to place several synchronized sensors, as long as we can record the true wave field and not only the average energy. We are now looking forward to image localized reflectors or to quantify absorption effects, but also to use natural noise as it was done in closed media and in underwater acoustics [[Duvall et al. \(1993\)](#); [Weaver and Lobkis \(2001\)](#); [Roux et al. \(2004\)](#)].

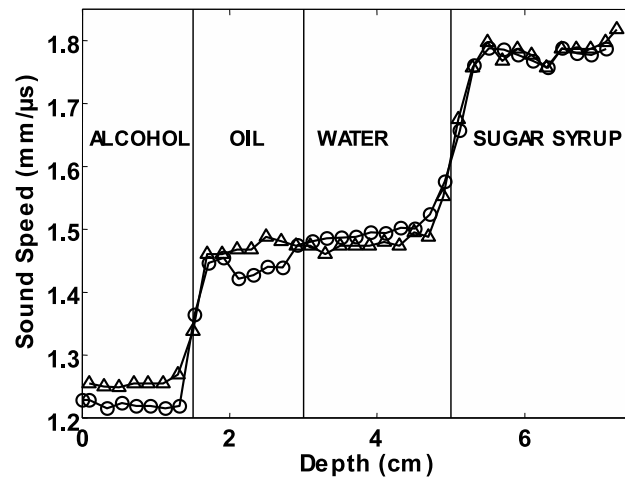


FIG. 6.6 – Sound-speed profile deduced from the travel times measured by one-bit correlations of the scattered wave field. Two set of measurements were performed : before (thin triangles) and after (thick circles) heating up the sample by 8°C . The four layers are clearly imaged.

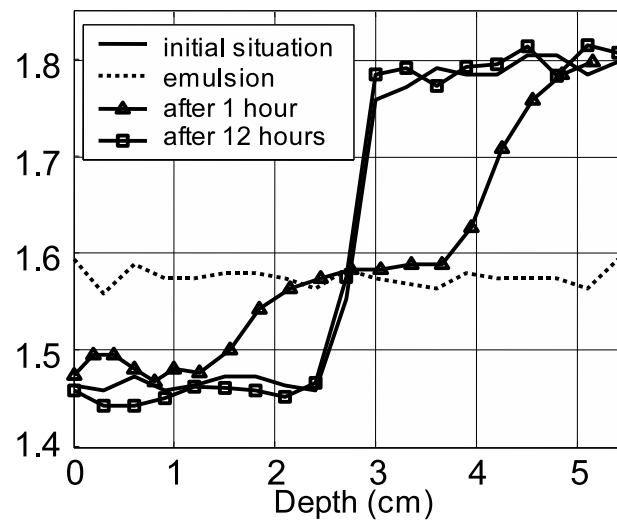


FIG. 6.7 – Sound-speed profiles obtained as the medium under investigation changes. Initially, there are two well-separated layers (oil/syrup). Then, they are mixed together to form an apparently homogeneous emulsion. Progressively, the two phases of the emulsion separate again, and the process can be monitored by the sound-speed profiles. Twelve hours later, the separation is complete.

6.2 Passive Imaging of localized reflectors and interfaces in open media

E. Larose, G. Montaldo, A. Derode, M. Campillo.

Article soumis à *Appl. Phys. Lett.*

Abstract :

Previous experiments in open media showed the possibility of reconstructing the direct (ballistic) wave between two passive sensors from the time-correlations of elastic or acoustic scattered wave fields. Here we illustrate how the Passive Imaging technique can also retrieve detailed features of the Green's function, beyond the ballistic wave. Two ultrasonic experiments are presented. In the first one we reconstruct the complete signature of two well-separated scatterers with a perfect distribution of distant sources. In the second experiment we image an aluminum/water interface with only a few sources. The lack of sources is compensated for by taking advantage of a multiple scattering slab.

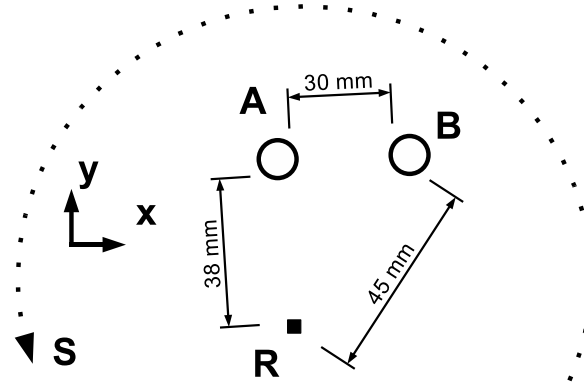


FIG. 6.8 – Sketch of the first experiment. A source S sends a broadband pulse $s(t)$ in an open medium. It is sensed by a fixed omni directional receiver R . Two 8 mm-diameter empty cylinders are placed nearby (approximative distances displayed). The source is rotated all over the set-up for 2000 different positions, along a perfect circle of radius 80 mm.

Article

Passive Imaging has recently undergone intensive developments. This technique is based on the cross-correlation of scattered wave fields recorded at two distant sensors. Waves can originate from either unknown but deterministic sources or from random noise. Under certain conditions (averaging over enough sources and/or scattering events) this cross-correlation is intimately linked to the impulse response between the passive receivers. Applications have been developed in several fields of wave physics : helioseismology [[Duvall](#)

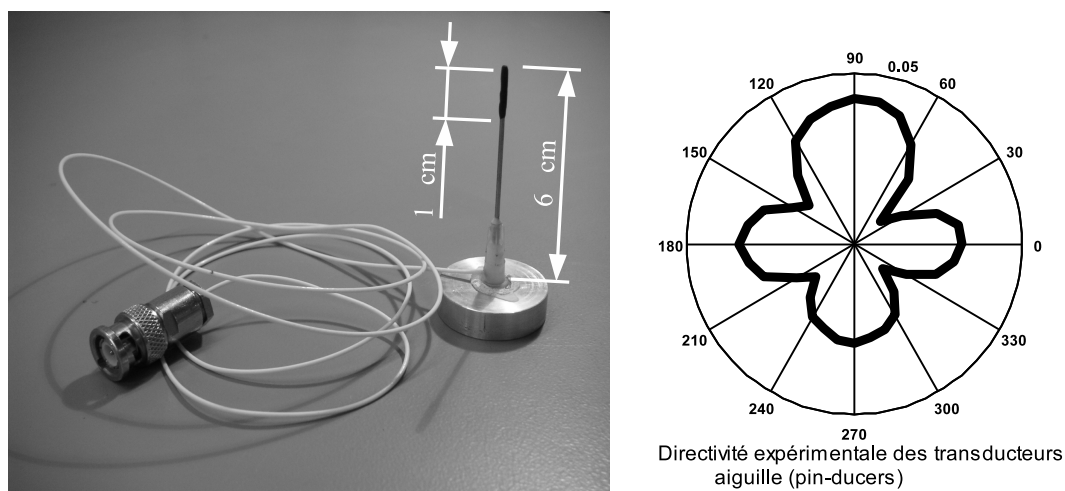


FIG. 6.9 – Photographie d'un transducteur aiguille développé par G. Montaldo au L.O.A. La partie noire est la partie efficace d'émission-réception. Ce transducteur fonctionne entre 0.5 et 2 MHz. Le cristal piézoélectrique a la forme d'un rectangle allongé dans la direction verticale. La directivité du transducteur dans le plan horizontal est pour cette raison quadrupolaire.

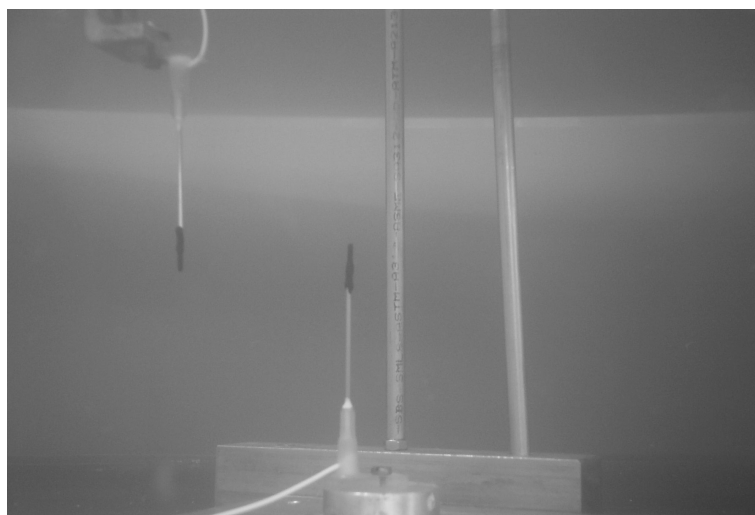


FIG. 6.10 – Photographie de l'expérience d'imagerie de deux diffuseurs isolés : deux cylindres verticaux. Le transducteur central est fixe et utilisé uniquement en réception. Le transducteur de gauche (source) est monté sur un moteur en rotation autour de l'ensemble du dispositif.

et al. (1993)], ultrasonics [*Lobkis and Weaver* (2001); *Weaver and Lobkis* (2001); *Derode et al.* (2003b)], underwater acoustics [*Roux et al.* (2004)], and seismology [*Campillo and Paul* (2003); *Shapiro et al.* (2005)]. This technique aims at acquiring impulse responses without the need of controlled sources, and can be applied to any field of wave physics where it is easier to place a sensor than a source. In a complex medium [*Weaver and Lobkis* (2004)], the impulse response usually consists of a first arrival (ballistic) followed by a coda. In closed cavities or waveguides [*Lobkis and Weaver* (2001); *Weaver and Lobkis* (2001); *Roux et al.* (2004)], the Passive Imaging technique was proved to converge to the full Green's function. But in open media, most of previous works [*Campillo and Paul* (2003); *Shapiro et al.* (2005); *Larose et al.* (2004a)] only reported the passive reconstruction of the seismic Rayleigh wave or the ultrasonic ballistic wavefront. In this Letter we report two ultrasonic experiments designed to retrieve the Green's function of an open medium beyond the ballistic front. In the first one we retrieve the signature of two localized and well-separated scatterers. A perfect average over sources is realized. When such an average is not possible, another idea is to take advantage of multiple scattering. In the second experiment we use diffuse waves, and we retrieve both the direct and a secondary wavefront reflected from an interface.

The first experiment is carried out in clear water (sound speed $c = 1.480 \text{ mm}/\mu\text{s}$, average wavelength $\lambda \approx 1.5 \text{ mm}$). Two reflectors A and B are placed in the vicinity of a single ultrasonic piezoelectric transducer R . This sensor is nearly omni-directional. Its (reciprocal) response $r(t)$ has a flat spectrum between 0.5 and 1.5 MHz. Its width is 0.5 mm, and its height $\sim 10 \text{ mm}$. The reflectors are two empty aluminum cylinders of radius 4 mm. The experimental set-up is quasi-2D (Fig. 6.8).

The source S sends a broad-band pulse (typically two oscillations at 1 MHz). The resulting wave $R(t)$ is recorded at the receiver R and contains the direct wave $S \rightarrow R$ and scattered contributions ($S \rightarrow A \rightarrow R$, $S \rightarrow B \rightarrow R$, $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow R$ and so on...). The impulse response between S and R is noted $h_{SR}(t)$ so the recorded signal is $R(t) = r(t) \otimes h_{SR}(t) \otimes s(t)$, \otimes meaning convolution. For a given source S the auto-correlation function reads :

$$C_S(\tau) = \int R(t)R(t+\tau)dt \quad (6.6)$$

$$= r(t) \otimes r(-t) \otimes h_{SR}(t) \otimes h_{SR}(-t) \otimes s(t) \otimes s(-t) \quad (6.7)$$

In general, this correlation has no reason to equal the Green's function $h_{RR}(t)$. Yet different approaches showed that if the correlation is averaged over a large number of sources perfectly surrounding the medium, the *exact* impulse response $h_{RR}(t)$ can be fully retrieved [*Derode et al.* (2003b); *Wapenaar* (2004); *Cassereau and Fink* (1992); *Roux et al.* (2005); *Snieder* (2004)]. Here such a source distribution is obtained by rotating the source with a step-motor (Fig. 6.8). An inter-source distance of $\lambda/6$ provides 2000 different positions, yielding to 2000 correlations $C(\tau)$ (Fig. 6.11). The averaged correlation $C(\tau) = \langle C_S(\tau) \rangle$ is displayed on Fig. 6.12. The enclosed box (a) shows the expected strong dominating peak of the auto-correlation at $\tau = 0$. The overall plot is a zoom into the subsequent

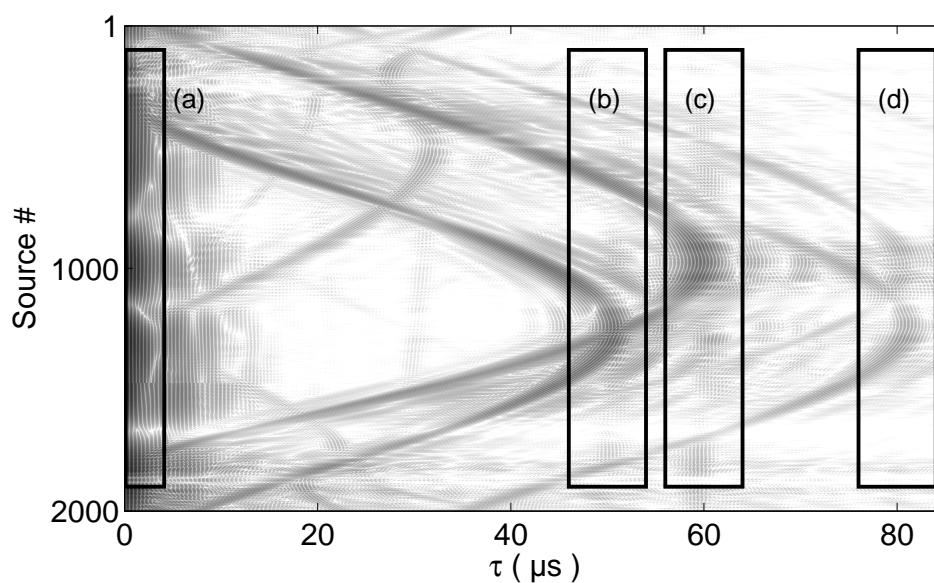


FIG. 6.11 – Individual contribution of each of the 2000 sources to the total Correlation $C(\tau)$, on a log scale. As noticed by Snieder [2004] based on a stationary phase approach, sources efficiently contributing to the Green's function are in the receiver-reflector direction. The wavefronts labelled (a-b-c-d) correspond to the direct (a) and secondary (b-c-d) arrivals in the retrieved Green's function (Fig. 6.12).

fluctuations (dotted line, from $\tau = 40 \mu s$ to $\tau = 85 \mu s$), superimposed with the reference impulse response $F(t)$ (continuous line). This reference is the convolution of $r(t) \otimes h_{RR}(t) \otimes r(t)$ (pulse-echo measurement) with $s(t) \otimes s(-t)$ (the source auto-correlation). The two waveforms show a degree of resemblance of 95.4 %.

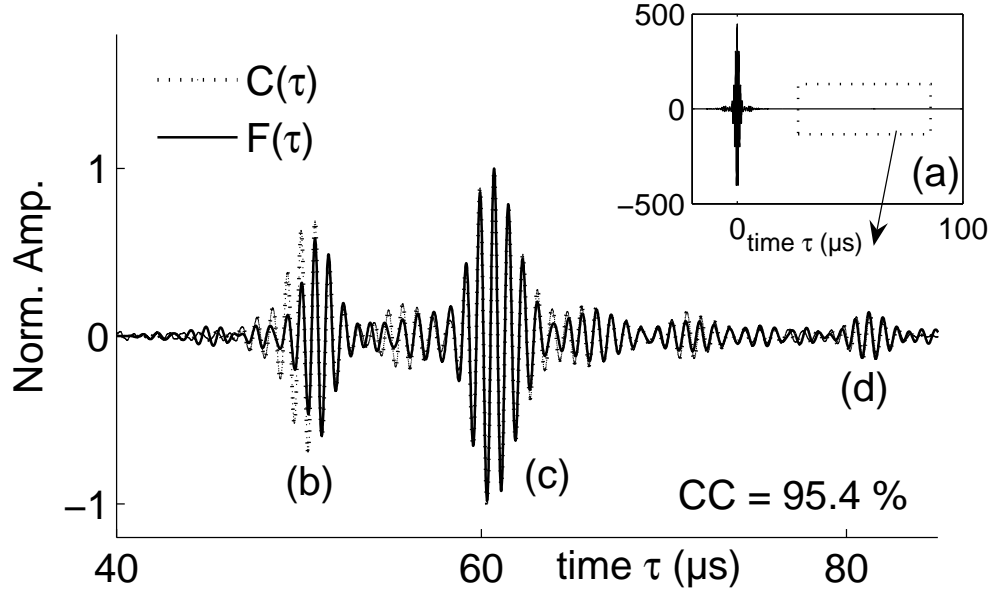


FIG. 6.12 – (a) Auto-correlation $C(\tau)$ averaged over 2000 sources, showing a strong peak at time $\tau = 0$. (b-c-d) Zoom into the late times. Thin dotted line : averaged autocorrelation $C(\tau)$; thick line : reference impulse response $F(\tau)$.

This is an experimental proof that the averaged correlation $C(\tau)$ reveals the detailed structure of this open medium. The wavefront labeled (b) in fig. 6.12 corresponds to the reflection on the first cylinder. It is followed by a weak pulse : the first cylinder's creeping wave. The second strong peak (c) is the reflection on the second cylinder, and the latest identified contribution (d) corresponds to a more complex ray path : $R \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow R$, ie a multiply scattered wave.

It was theoretically proposed to reconstruct the *effective* Green's function of the medium from correlations averaged over the disorder (*ensemble* average) [Snieder (2004); van Tiggelen (2003)]. Yet such an effective GF would not contain the deterministic signature of separate scatterers unless they are held fixed across ensemble average. Here we use source averaging only, a procedure that yields the exact Green's function, which is required for applications to imaging.

In reality, natural sources will never perfectly surround the medium under investigation. Is it still possible to retrieve the impulse response of an open medium beyond the ballistic arrival? In the following experiment, we compensate for the lack of sources by dif-

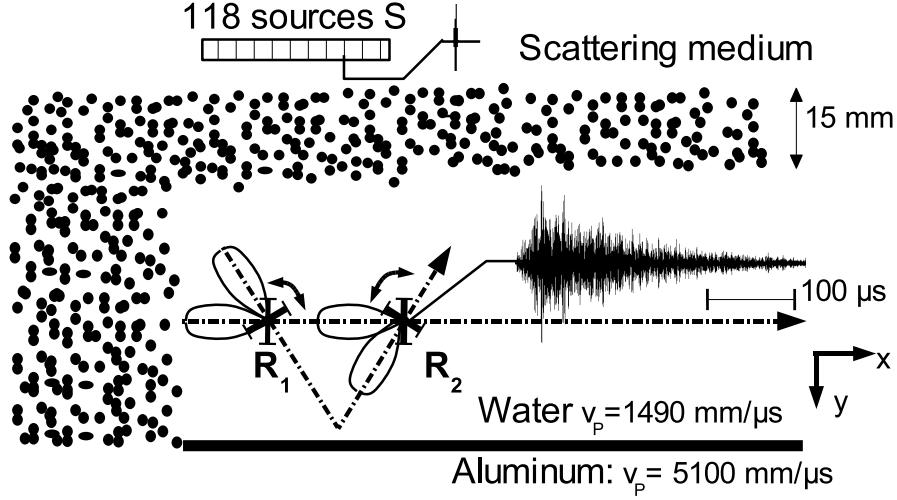


FIG. 6.13 – Setup of the 2^d experiment and typical waveforms. The sources S shot a $1 \mu\text{s}$ pulse the one after the others. The receivers' directivity pattern is represented (thin line). It is rotated twice at each position.

fuse waves. The experimental setup (Fig. 6.13) is identical to the one used by [Larose et al. \(2004a\)](#). Our aim is now to image a water/aluminum interface. We use $N = 118$ aligned sources S to illuminate a scattering medium made of vertical steel rods randomly distributed (the transport mean free path ℓ^* was measured to be 3 mm [[Larose et al. \(2004a\)](#)]). The interface to be imaged is behind this complex structure. $h_{SR_i}(t)$ denotes the scattered field received at R_i when S shoots a $\Delta = 1 \mu\text{s}$ pulse (central frequency $f_0 = 3 \text{ MHz}$). A typical example of such a coda waveform is shown on Fig. 6.13. Again, the whole setup is 2-D.

Contrary to the previous experiment, a conventional ultrasonic transducer (size $\sim \lambda$) is used here. Indeed an improved sensitivity is required to record the weak contributions of the late coda $h_{SR_i}(t)$. Unfortunately the transducer is not omni-directional. This is compensated for by rotating the sensor at least twice at each position. Then the receiver is translated along the x -axis. The emission/reception sequence is repeated for 12 different locations i . This provides a set of 118×12 records for each sensor angle. For each pair $R_i R_j$, we compute the time- and source- averaged correlation :

$$C_{ij}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{S=1}^N \int h_{SR_i}(t) h_{SR_j}(t + \tau) dt \quad (6.8)$$

The resulting traces are displayed in fig. 6.14 where both the direct and the reflected hyperbolic-shaped wavefronts are visible. Note that one single correlation $C_{ij}^S(\tau)$ does not contain any clear arrival : a source averaging is needed. The measurement of the arrival times along the sensor array provides a precise measurement of the interface position : it

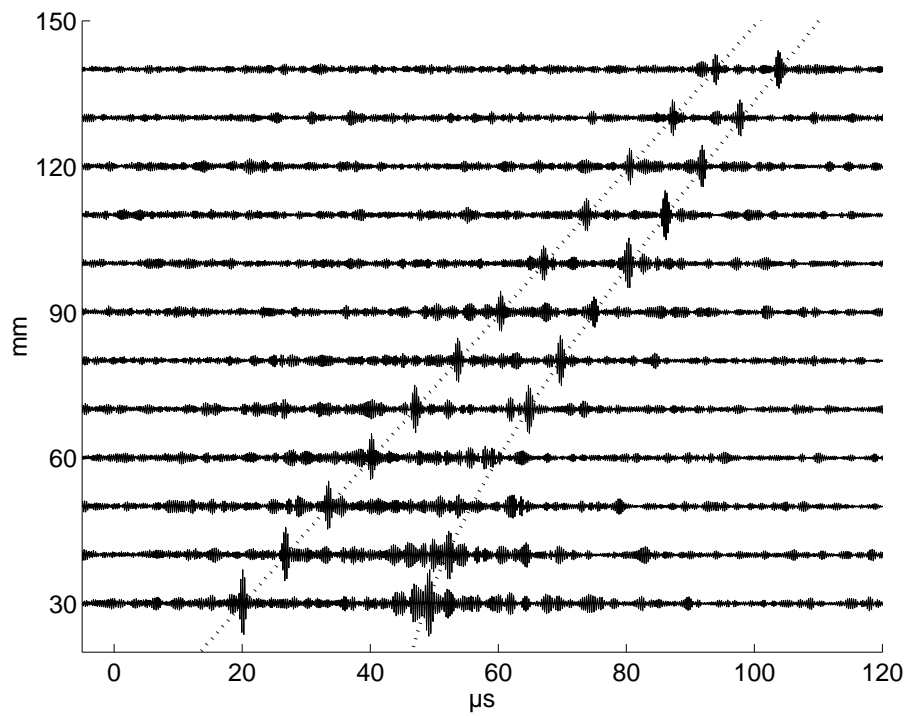


FIG. 6.14 – 118 source-averaged correlations $C_{R_i R_j}(\tau)$ for 12 distances $R_i - R_j$. The direct and reflected signals are superimposed. Dotted lines represent the arrival times for the direct and reflected paths. The scatterer is a plane interface positioned 33.2 mm away from the sensor array.

was parallel to the array and 33.2 mm from the x -axis. The estimated error on the reconstructed travel times is of the order of one record sample : $0.05 \mu s$. The signal-to-noise ratio of the reconstructed waveforms roughly corresponds to Weaver's theoretical prediction [Weaver and Lobkis (2005)] in 2-D : $5 < \frac{NT}{2\sqrt{\pi}\Delta} \frac{c}{2\pi R f_0} < 20$.

These results show that it is possible to retrieve the details of the Green's function of an open medium beyond the first (ballistic) arrival. Note that it differs from Bakulin and Calvert (2004) in that the whole coda (high-order multiple scattering contributions) is processed and taken advantage of; the signal-to-noise ratio is noticeably improved. These results have been obtained using distant sources, but can be generalized to the case of purely random noises in any field of wave physics. In seismology, these observations suggest that the application range of Passive Imaging would extend to seismic prospecting or imaging of deep Earth.

6.3 Lunar Subsurface Investigated from Correlation of Seismic Noise

Eric Larose, Amir Khan, Yosio Nakamura, Michel Campillo.
article accepté dans *Geophysical Research Letters*

Abstract :

By correlating seismic noise recorded by four sensors placed on the Moon during the Apollo 17 mission, we have retrieved a well-defined dispersed Rayleigh wave pulse. Inversion of its group velocity provides new constraints on the lunar subsurface structure. The estimated "signal-to-noise" ratio (SNR) of the retrieved Rayleigh wavetrain is strongly dependent on solar illumination, effectively making solar heating a source of seismic noise on the Moon. This result suggests that in future planetary missions it is feasible to extract information on the internal structure of extraterrestrial objects by correlating seismic noise even when natural quakes are absent.

The passive imaging technique is based on the time-domain cross-correlation of acoustic or seismic waves acquired at two passive sensors. The main assumption is that the cross-correlation yields the Green function (GF) between the receivers, i.e. the impulse response recorded at one sensor, with the other acting as source. Initial applications of the method include helioseismology, where it provided images of the Sun's interior [Duvall *et al.* (1993)] and more recently, it has been tested in the ultrasonic domain using diffuse fields [Lobkis and Weaver (2001); Derode *et al.* (2003b); Larose *et al.* (2004a) as well as with noise [Weaver and Lobkis (2001)]. Passive imaging has also been achieved using seismic coda [Campillo and Paul (2003)] as well as seismic noise [Shapiro and Campillo (2004); Shapiro *et al.* (2005); Sabra *et al.* (2005a)] for frequencies ranging from 0.025 to 0.2 Hz. In the latter

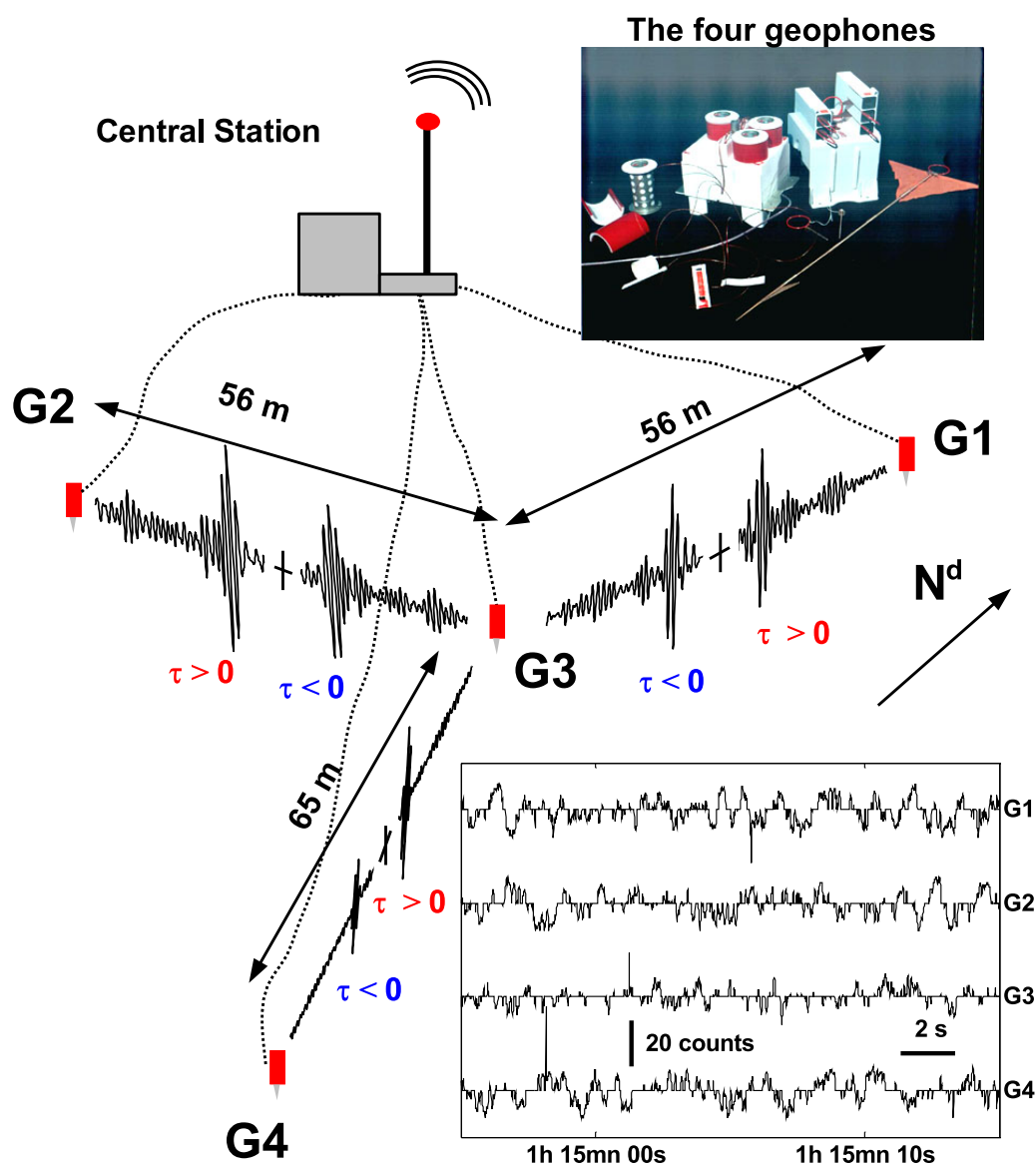


FIG. 6.15 – Configuration of the Apollo 17 LSPE experiment. It was composed of four geophones (velocimeters) : G1, G2, G3 and G4, all connected to a central station for signal sampling, digitization and telemetering. Sample of raw seismic data from each geophone are displayed in the enclosed box (no logarithmic decompression), for Aug. 16, 1976 (UTC time). Typical correlations $C_{13}(\tau)$, $C_{23}(\tau)$, $C_{34}(\tau)$ are plotted between the corresponding pair of sensors. Crosses in the center of each correlation trace mark $\tau=0$. NASA photo A17.S72_37259.

application it provided well-resolved images of the first 20 km of the subsurface beneath California. On Earth, these studies have shown that a statistical treatment of seismic noise yield the GF when averaged over sufficiently long time. Microseismic background noise is mainly excited by surface sources like oceanic and atmospheric perturbations [*Rhie and Romanowicz (2004)*]. The purpose of the present paper is to take the passive imaging method beyond the Earth and apply it to extraterrestrial planets on which neither an ocean nor an atmosphere exists. In particular, our aim is to investigate the method in the case where the microseismic background noise is made of fully diffusive waves, at frequencies higher than previously investigated [*Shapiro et al. (2005)*].

The only solar system body other than the Earth from which we have seismic observations pertinent to its interior properties is the Moon. From 1969 to 1972 the US Apollo program installed one short-lived and four long-lived seismic stations on the Moon. All but the first station were operated until 1977. The data collected by the Apollo seismic network provided the basis for a number of studies of lunar seismicity and internal structure published during the 1970s, early 1980s, and again recently [*Latham et al. (1973)*; *Toksöz et al. (1974)*; *Nakamura et al. (1982)*; *Khan and Mosegaard (2002)*; *Lognonné et al. (2003)*]. In addition to the above passive seismic experiment, active seismic experiments were also carried out on missions 14, 16 and 17. The active seismic experiments performed at the Apollo 14 and 16 sites were only turned on during the landing missions in active mode and weekly 30-minute passive listening periods following the missions, with the weekly listening modes terminated on 7 December 1973 whereafter only monthly operational checks were performed (ALSEP status report, 1976). The main objective was to infer the velocity structure of the uppermost part of the crust down to a few km depth using traditional seismic refraction techniques [*Cooper and Kovach (1974)*].

Apollo 17 touched down on the floor of the Taurus-Littrow Valley near the southeastern rim of the Serenitatis Basin, which consists of irregular, heavily cratered regolith developed on lava flows partly filling an embayment between massifs 2 km high [*Heiken et al. (1991)*]. The Apollo 17 Lunar Seismic Profiling Experiment (LSPE) was deployed on Dec. 14, 1972 at a distance of about 180 m W-NW of the lunar module. Four geophones, with natural resonant frequencies of 7.5 Hz, labeled G1 to G4, were deployed in a triangular array (see Fig. 1) and recorded the vertical ground velocity in the frequency range from 3 to 30 Hz during the landing mission in 1972 [*Kovach et al. (1973)*] and then again from August 1976 to April 1977. The geophones were simultaneously connected to the central station where the seismic signals $S_{1..4}(t)$ were sampled at 118 Hz and digitized before being telemetered to the Earth. Prior to conversion into a 7-bit digital format (counts 0 to 127), the signals were conditioned using a logarithmic compression, which was done to increase the dynamic range. A typical four-channel record is displayed in Fig. 6.15.

We processed continuous data from Aug. 15, 1976 to Apr. 24, 1977. They are time-windowed into 2016 record samples, each lasting about $T = 3$ hours for a given record d . The correlated traces are calculated directly from the raw data without applying any

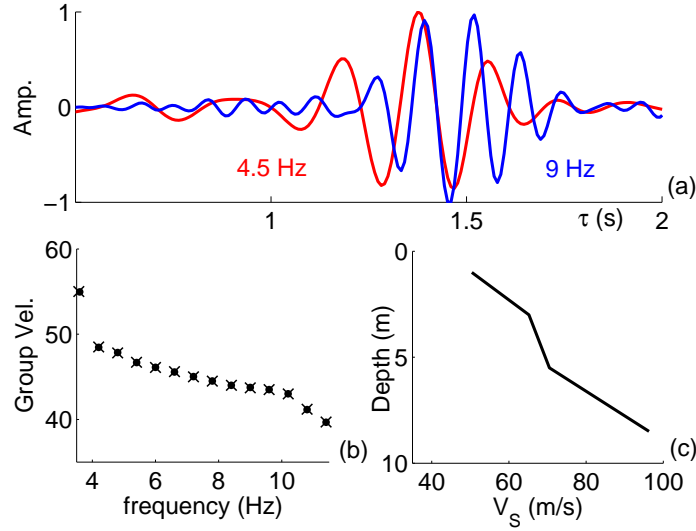


FIG. 6.16 – Dispersion analysis of the Rayleigh pulse. (a) The wave packet is filtered in two non-overlapping frequency bands (around 4.5 Hz and 9 Hz). (b) Observed dispersion curve of the Rayleigh wave group velocity. Dots : observations. Crosses : calculated data from the profile shown in (c). (c) Result of the inversion of the dispersion curve showing the upper 10 m of the shear wave velocity profile.

decompression or correction filter. The absence of decompression tends to equalize the noise amplitude. For a given pair of geophones i, j , and the record d , a cross-correlated trace is determined as

$$C_{ij}^d(\tau) = \int_d^{d+T} S_i(t + \tau) S_j(t) dt \quad (6.9)$$

Correlated traces are then filtered in the frequency range of interest (4-12 Hz). The central part of each trace $|\tau| < 0.5$ s (cross talking between geophones contribute to a peak at the correlation time $\tau = 0$) is not displayed. Each trace is normalized by its maximum value. At the end we computed the average of the correlations over the set of records d . Typical results are displayed in Figs. 6.15, 6.16(a) and 6.17(a). A well-defined pulse is observed both for positive and negative correlation times τ . Why should this pulse emerge from the correlations? Seismic waves propagating in the direction $j \rightarrow i$ add up coherently in the correlation, and contribute to this well-defined pulse for times $\tau > 0$ (causal part of the correlations). Seismic waves propagating in the opposite direction ($i \rightarrow j$) contribute to the well defined pulse for times $\tau < 0$ (acausal part of the correlations). Waves propagating in other directions add up incoherently and contribute to the residual fluctuations in the correlations [Roux et al. (2004)].

The reconstructed pulses are interpreted as Rayleigh waves between geophones i and j , i.e. the ground velocity response of the subsurface at j (i) to a vertical impulsive force

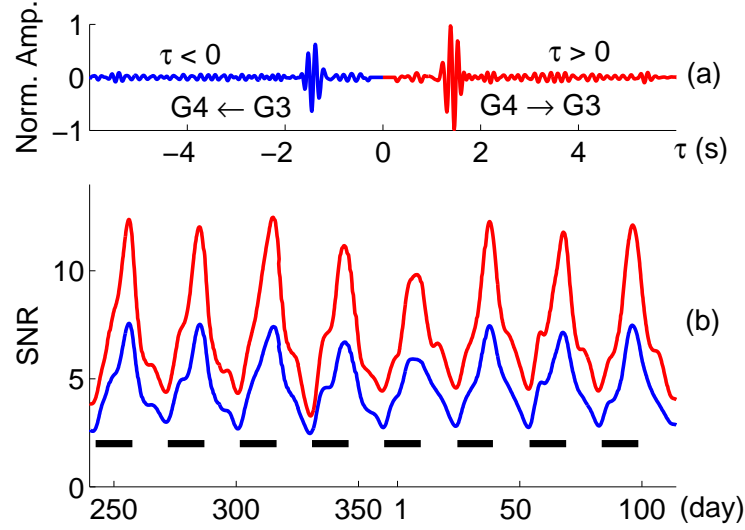


FIG. 6.17 – (a) Example of correlation $C_{34}(\tau)$ filtered in the 4-12 Hz range. The red peak (causal part, $\tau > 0$) corresponds to the Rayleigh wave propagating from G4 to G3 as if G4 was a vertical impulsive source. The blue peak is the acausal part, $\tau < 0$. (b) SNR of the causal (red) and acausal (blue) Rayleigh pulse as a function of record date d (x -axis in julian days from 1976 to 1977). Black lines represent days when the Sun was shining and heating the Apollo 17 landing site. The increase in the SNR is synchronized with the Sun's illumination, oscillating with a periodicity of 29.5 days.

at i (j). They are found to propagate with an average velocity of ~ 50 m/s, and are clearly dispersive, as shown in Fig. 6.16(a). The group velocity is evaluated by picking the envelope arrival time of the Rayleigh pulse. This pulse is filtered around 14 different frequencies, ranging from 3.6 Hz to 11.4 Hz (bandwidth 33%). Velocities were calculated when the signal-to-noise ratio (SNR) of the correlated traces is > 2 . When possible we averaged velocities over the three central pairs of geophones. We plotted the dispersion curve in Fig. 6.16(b), which is used to image the subsurface velocity structure by inverting the Rayleigh wave group velocity [Herrmann and Ammon (2004)]. In our inversion, a four layer model was assumed with variable thickness and velocities. The uncertainties on observed velocities are estimated to be 5%. The obtained shear-wave velocity profiles are displayed in Fig. 6.16(c). The indicated jump below 5 m depth is taken to be the base of the lunar regolith, consisting of impact breccias. Cooper and Kovach (1974), using travel time inversion of refracted P -waves, found that the compression wave velocity beneath the Apollo 17 site was around 100 m/s from 0 to 4 m depth and then 327 m/s from 4 to 32 m depth. Our shear wave profile thus complements and is consistent with previous observations [Cooper and Kovach (1974); Horvath et al. (1980)]. Thus by comparing these profiles we can conclude that the v_P/v_S ratio of the Lunar regolith is ~ 2 .

As a curious feature of our correlations we found that the Rayleigh wave emergence is

fluctuating with time of the year. To quantify these variations, we estimated the SNR of the correlated traces as a function of record date d (22). The signal level corresponds to the amplitude of the (causal or acausal) peak. The noise is defined as the standard deviation of the subsequent fluctuations from $\tau = \pm 2$ s to $\tau = \pm 4$ s (Fig. 6.17(a)). Rigorously speaking, this part of the correlated trace, representing apparent group velocity below 30 m/s, should hide the rest of the impulse response (for instance reflections of the Rayleigh pulse by surrounding heterogeneities). These contributions are often much weaker than the direct pulse, and probably negligible compared with the remaining noise (the seismic signal that does not yield the GF in the correlation and the electronic noise). The SNR displayed in Fig. 6.17(b) is calculated for both the causal (red) and acausal (blue) part of the correlation. It is found to fluctuate with a periodicity of exactly 29.5 days which is also the lunation period. The SNR increases during daytime (displayed as thick horizontal bars on Fig. 6.17(b)), and decreases at night, pointing to an origin of the Rayleigh wave with solar illumination. The following is proposed as an explanation for the coupling between solar radiation and the Rayleigh wave generation. When the sun heats the lunar surface, temperature increases from -170°C to $+110^\circ\text{C}$ [Langseth *et al.* (1973)], leading to very high vertical thermal gradients, and resulting in slumping or cracking of the lunar surface material. This interpretation is in line with what was observed during the Apollo era where a large percentage of the seismic events were found to be very small moonquakes, termed thermal moonquakes, occurring with great regularity [Duennebier and Sutton (1974)]. Their activity starts abruptly about 2 days after lunar sunrise and decreases rapidly after sunset.

The SNR was also calculated for correlated traces averaged over an increasing number N of time-windows d . From $N = 1$ to 100 (corresponding to a total record length of 300 hours), the SNR is found to increase as \sqrt{N} , meaning that waves not contributing to the Rayleigh pulse add up incoherently. For longer record lengths (higher N), the SNR saturates, which might be due to remnant sources. Indeed identical waveforms were observed from thermal moonquakes occurring at different times. Another reason for the SNR to saturate might be cross-talking between acquisition channels.

The correlated traces displayed in Figs. 6.15 and 6.17(a) are not found to be symmetric in time. Though the pulse arrival times are symmetric, waveform amplitudes may change due to preferential direction of propagation of the incident wave field [van Tiggelen (2003); Paul *et al.* (2005)]. The peak amplitude for each part of the correlations, and for each couple of geophones, is evaluated. Since the reconstructed peak amplitude is proportional to the intensity of the incident waves, we interpret this asymmetry as an anisotropy of the wavefield. Let us assume that the symmetric part of the traces is generated by an isotropic flux Φ_0 (waves coming from all directions onto the array), and furthermore that the asymmetric part, corresponding to the excess of amplitude observed on one part of the traces, is generated by an anisotropic flux Φ (preferential wave incidence). The peak amplitude is therefore proportional to $\Phi_0 \pm \frac{1}{2}\Phi \cos(\theta_i)$ where θ_i is the incident angle of the anisotropic flux onto the pair of geophones $i - 3$ (Fig. 6.18). To quantify the asymmetry,

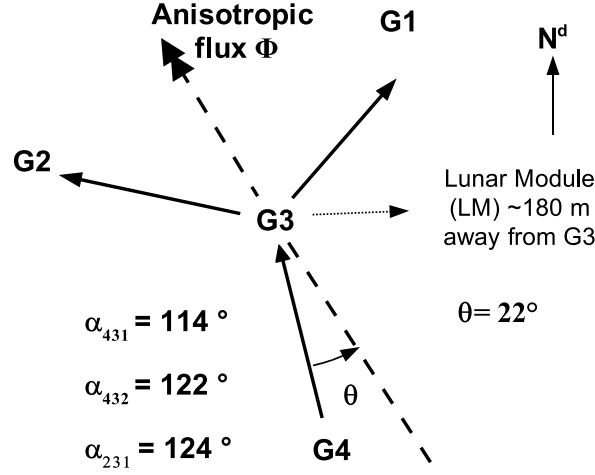


FIG. 6.18 – Schematic view of the anisotropic flux.

we estimate the following ratio :

$$\frac{P_{3i}^+ - P_{3i}^-}{P_{3i}^+ + P_{3i}^-} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \cos(\theta_i)$$

where P_{3i}^+ is the peak amplitude of the $C_{3i}(\tau)$ positive part. Note that this ratio for pair 3–4 can be deduced from Fig. 6.17(a). It should be noted that this flux is not a remnant wave train (which would appear as a peak at different times τ in the three pairs). It corresponds to the preferential direction of propagation of the diffuse field intensity. Using this array technique, we evaluated quantitatively the incident direction of the seismic anisotropic flux to be $+22^\circ$ relatively to $G4 - G3$ (Fig. 6.18), pointing in the S-E direction to Steno crater, as either a dense area of scatterers or an area with intense thermal moonquake activity.

We have presented a technique to investigate the subsurface between passive geophones with a technique based on the correlation of lunar seismic noise. We have shown that even in a quiet seismic environment with feeble sources, it is possible to obtain a Rayleigh wave dispersion curve. From the inversion of this dispersion curve we estimated the shear wave velocity profile, which provided new information on the velocity structure of the regolith at the Apollo 17 site. Moreover, we have established the Sun as an active generator of lunar seismic noise. In particular the SNR of the reconstructed Rayleigh pulse was found to be strongly dependent on solar illumination. The seismic activity originates from the strong thermal gradients induced during lunar day as well as night. We have applied an array technique for locating noise sources. The weak anisotropy of the seismic diffuse waves reveals a preferential direction of propagation, possibly originating from an area with dense scatterers or increased thermo-seismic activity.

The results presented here establish the method of extracting the Rayleigh-wave GF by cross-correlating seismic noise, as indeed extendable to extraterrestrial planets that

not only differ in size, evolution and consequently seismic activity, but also in nature of origin of the noise from that of the Earth. This provides a novel avenue for future seismic exploration of the planets on which quakes might occur infrequently and are most probably also inhomogeneously distributed, of which Mars might be cited as an example [*Golombek et al. (1992)*]. In addition it holds the potential of increasing the scientific return, as noise between events can be successfully used rather than being discarded as has traditionnaly been the case. Specifically, to probe deeper into the subsurface on future seismic missions, the following points should be kept in mind. Distances between stations should preferably be between one and a few tens of wavelengths, as scattering attenuation might become important for greater distances. The depth probed being roughly $1/3$ of the Rayleigh wavelength, this implies going to lower frequencies which necessitates the deployment of broad-band seismometers *e.g.* [*Lognonné et al. (2000)*].

Chapitre 7

Convergence des corrélations vers la fonction de Green

L'objet de ce chapitre est de proposer un modèle de convergence des corrélations de champs diffus vers la fonction de Green (GF) entre les deux points de mesure. Les notations usuelles sont rappelées ici :

- A et B sont les deux points de l'espace où le champ d'onde est mesuré.
- S est un point source, à la position en général aléatoire ou inconnue.
- C_{AB}^S est la corrélation temporelle d'une onde émise par S et enregistrée en A et B .
- G_{AB} est la fonction de Green entre A et B , parfois appelée dans ce chapitre la *fonction de référence*.
- N est le nombre de sources S sur lesquelles les corrélations sont moyennées :
$$\langle C_{AB} \rangle_N = \sum_{S=1}^N C_{AB}^S.$$
- D est la distance entre A et B .

Nous tenterons de répondre aux questions suivantes : Quelles sont les lois physiques qui font tendre C_{AB}^N vers G_{AB} ? De quels paramètres dépend cette convergence ? Et surtout, quelle est la vitesse de convergence ?

7.1 Problématique générale

Plusieurs auteurs [[Derode et al. \(2003b\)](#); [Snieder \(2004\)](#); [Roux et al. \(2004\)](#)] montrent que la moyenne des corrélations sur des sources idéalement distribuées donne accès à la fonction de Green entre deux points de mesure. Une distribution *idéale* est une distribution qui entoure de façon régulière et continue les deux capteurs passifs. Le champ émis par l'ensemble de ces points et enregistré sur un temps infini donne accès au champ n'importe où (à l'intérieur de la cavité), et n'importe quand. C'est le théorème d'Helmholtz-Kirchhoff, invoqué par les praticiens du retournement temporel [[Cassereau and Fink \(1992\)](#)]. Une

démonstration équivalente est proposée par [Wapenaar \(2004\)](#) en élastique sur la base du théorème de Betti. Dans le chapitre IV de ce manuscrit, il a aussi été montré qu’une distribution de sources remplissant intégralement un volume permet l’émergence de la GF dans les corrélations.

Cependant ces hypothèses de distributions ”parfaites” sont rarement vérifiées en pratique. En général, le nombre de source est limité, et la position des sources est aléatoire. Cela a-t-il des implications sur l’émergence de la GF ? L’analogie corrélation-retournement temporel nous renseigne qualitativement sur ce point : si les sources ne remplissent pas uniformément le volume, il est quand même possible de reconstruire une partie de la GF par corrélation en s’aidant de la diffusion multiple qui rajoute des sources secondaires [[Weaver and Lobkis \(2004\)](#); [Derode et al. \(2003a\)](#); [Larose et al. \(2004a\)](#)].

Une simulation numérique nous permet de quantifier l’effet d’une distribution imparfaite de sources. Plaçons deux capteurs A et B à une distance D l’un de l’autre ($D = 3\lambda$) dans un milieu homogène. (a) Dans une première simulation, les N sources sont régulièrement réparties sur un cercle parfait. (b) Dans la deuxième simulation, les N sources sont placées aléatoirement dans l’espace 2-D. La convergence des corrélations vers la GF est quantifiée par le coefficient de corrélation entre les deux formes d’ondes obtenues. Les résultats sont présentés dans la figure 7.1. Lorsque les sources sont idéalement réparties sur un cercle, la convergence est rapide, et parfaite au-delà de $N = N_c$ sources (dans l’exemple proposé Fig. 7.1, $N_c = 30$ ¹)

$$\langle C_{AB}(\tau) \rangle_N \stackrel{N \geq N_c}{=} G_{AB}(\tau)$$

Lorsque les sources sont réparties aléatoirement, la convergence est plus lente et aucune saturation n’est observée :

$$\langle C_{AB}(\tau) \rangle_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\longrightarrow} G_{AB}(\tau)$$

Cette simulation montre que la façon dont sont distribuées les sources est un paramètre essentiel de la convergence des corrélations vers la GF. La distribution *idéale* sur un cercle parfait semble être un cas particulier rarement vérifié dans les expériences, en particulier en milieu naturel. Nous choisissons donc dans la suite de ce chapitre de faire l’hypothèse d’une répartition aléatoire de sources dans tout l’espace physique disponible. Cette hypothèse est particulièrement raisonnable dans le cas du bruit sismique.

7.2 Observations générales

Nous avons observé expérimentalement un certain nombre de phénomènes (voir chapitres précédents) :

- C_{AB}^N converge plus rapidement vers G_{AB} lorsque le nombre de sources N croît.

¹dans un milieu diffuseur, la distance à partir de laquelle on s’attend à observer une convergence est $\lambda/2$ (Nyquist). En milieu homogène comme présenté ici, c’est plutôt une distance angulaire par rapport au couple AB qui a du sens, cf le théorème Van Cittert-Zernike.

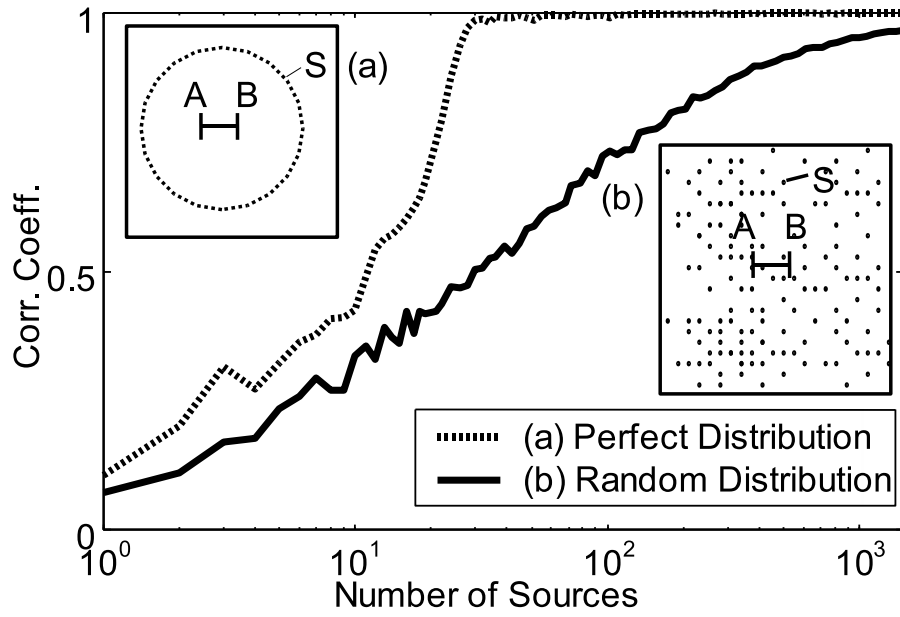


FIG. 7.1 – Comparaison de la rapidité de convergence des corrélations $\langle C_{AB}(\tau) \rangle_N$ vers $G_{AB}(\tau)$ en fonction du nombre N de sources S et de leur distribution. La distance entre A et B est 3λ . (a) distribution régulière des sources sur un cercle de rayon 15λ : la convergence est observée au-delà de $N=30$. (b) distribution aléatoire des sources : la convergence est beaucoup plus lente et semble suivre une loi statistique très différente.

- C_{AB} converge vers G_{AB} lorsque la longueur de la fenêtre temporelle de corrélation croît (plus la coda, ou la fenêtre de bruit, est longue, meilleure est la réponse impulsionnelle reconstruite).
- C_{AB} converge vers G_{AB} lorsque la largeur de bande passante augmente (plus la bande passante est large, plus un enregistrement contient d'informations, et meilleure est la reconstruction par corrélation).
- La convergence est plus rapide quand les capteurs sont proches (D est faible).
- Il est plus facile de reconstruire les ondes directes que les réflexions plus tardives. Autrement dit la convergence est plus rapide pour les temps courts de la fonction de référence G_{AB} que pour les temps longs.

7.3 Modélisation en milieu homogène 2-D acoustique

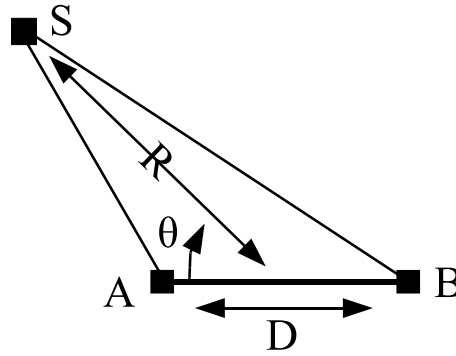


FIG. 7.2 – schéma de la géométrie source-récepteurs adoptée (2-D acoustique).

Le cas le plus simple pour traiter le problème des corrélations est le cas d'une onde acoustique se propageant dans un milieu homogène à 2-D. Physiquement, c'est le cas des ondes ultrasonores dans l'eau avec des capteurs ayant une de leurs dimensions très supérieure aux autres, comme ceux utilisés au L.O.A.².

Nous notons v la célérité de l'onde dans le milieu, λ la longueur d'onde correspondant à la fréquence centrale f (pulsation ω), et $\Delta\omega$ la bande passante. Nous choisissons $\Delta\omega \approx \omega$. Cette hypothèse n'est pas très restrictive, dans la mesure où la majeure partie des résultats et interprétations physiques qui suivent ne sont pas remis en cause par une bande passante plus étroite.

S émet une impulsion $s(t)$ en $t = 0$. En A et B nous mesurons $h_{SA}(t)$ et $h_{SB}(t)$

²Laboratoire Ondes Acoustiques, ESPCI & PARIS-7

respectivement. La corrélation entre ces deux mesures s'écrit :

$$C_{AB}^S(\tau) = \int_0^\infty h_{SA}(t)h_{SB}(t+\tau)dt \quad (7.1)$$

7.3.1 Estimateur de la convergence

Il est courant, pour estimer la qualité d'un signal, d'utiliser la notion de "Rapport Signal sur Bruit" (RSB). Ici cette notion est délicate pour diverses raisons :

1. Le *bruit* sismique ou ultrasonore est parfois utilisé comme *signal* à corrélérer...
2. C_{AB}^S est la corrélation de signaux exclusivement déterministes originaires de S et solution de l'équation d'onde. Comment alors distinguer la part de signal et de bruit ?
3. Dans la pratique, comment définir le niveau de signal dans les corrélations parfois dominées par le bruit (lorsque l'on observe que la fonction de Green G_{AB} est d'amplitude trop faible) ?

Nous choisissons d'adopter les conventions suivantes : le "signal" dans les corrélations est donc exactement G_{AB} (à une constante de normalisation près) et le "bruit" de la corrélation $b(t)$ est l'ensemble du champ d'onde qui ne correspond pas à la fonction de Green G_{AB} de référence. Ces deux fonctions sont orthogonales :

$$\left\langle \int_\infty G_{AB}(t)b(t)dt \right\rangle = 0 \quad (7.2)$$

La moyenne invoquée ici est la moyenne sur l'ensemble des réalisations possibles du tirage aléatoire des sources. L'estimateur de convergence est le coefficient de corrélation entre C_{AB} et la fonction de référence :

$$CC = \frac{\int_\infty G_{AB}(t)C_{AB}(t)dt}{\sqrt{\int_\infty G_{AB}^2(t)dt}\sqrt{\int_\infty C_{AB}^2(t)dt}} \quad (7.3)$$

Ce coefficient est normalisé. Lorsque ces fonctions sont identiques, $CC = 1$: il y a convergence, c'est le cas où le bruit est négligeable $b(t) = 0$. Lorsque c'est le bruit qui domine, $CC = 0$: la corrélation ne donne pas la fonction de Green. L'étude de la convergence des corrélations vers la fonction de Green va donc en pratique consister à étudier l'évolution du coefficient CC en fonction des paramètres de notre choix (temps d'intégration, nombre de sources, distance entre les capteurs, fréquence...).

7.3.2 Notion de zone de cohérence

[Roux et al. \(2004\)](#) et [Sabra et al. \(2005b\)](#) proposent de modéliser la contribution des sources en terme de zone de cohérence (*end-fire lobe*). Très schématiquement, les sources qui sont dans l'axe AB vont contribuer à la fonction de référence, et les sources hors de cette zone vont contribuer au bruit $b(t)$ autour de la fonction de référence. Ce modèle est le point de départ de la modélisation qui suit.

L'onde a une bande passante finie $\Delta\omega$. Par transformée de Fourier, la corrélation d'une onde issue de S et la GF de référence s'écrivent :

$$\begin{cases} C_{AB}^S(t) &= \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{v}|SA - SB|\right) e^{i\omega t} d\omega \\ G_{AB}(t) &= \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega D}{v}\right) e^{i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (7.4)$$

Lorsque la source est proche de l'axe AB (sans être *exactement* sur cet axe), la corrélation C_{AB}^S va ressembler fortement à la fonction de référence, et avoir une légère contribution de bruit $b(t)$. Lorsqu'elle est loin de l'axe AB , la source ne contribue qu'au bruit dans les corrélations. Comment varie la contribution d'une source en fonction de sa position ?

Pour cela nous allons quantifier la partie de la corrélation qui contribue à la fonction de référence en calculant le coefficient de corrélation (non renormalisé) entre les deux fonctions :

$$CC(S) = \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{v}|SA - SB|\right) \cos\left(\frac{\omega D}{v}\right) d\omega \quad (7.5)$$

$$CC(S) = \begin{cases} 2\Delta\omega \cos\left(\frac{\omega}{v}(|SA - SB| + D)\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2v}(|SA - SB| + D)\right) & [a] \\ + 2\Delta\omega \cos\left(\frac{\omega}{v}(|SA - SB| - D)\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2v}(|SA - SB| - D)\right) & [b] \end{cases} \quad (7.6)$$

La ressemblance entre la corrélation et la fonction de référence dépend donc des arguments $|SA - SB| + D$ et $|SA - SB| - D$. Autrement dit elle dépend de la différence de chemin optique de S vers A ou B , comparé au chemin D (Fresnel). La grandeur $|SA - SB|$ varie entre 0 et D pour toutes les positions possibles de S dans l'espace.

L'argument du membre $[a]$ est donc toujours supérieur à D . Si l'on suppose que D n'est pas très inférieur à λ (en général il n'est pas utile de placer A et B au même endroit!), alors $\frac{\Delta\omega}{2v}D$ n'est pas très petit devant 1, ce qui implique que le sinus cardinal sinc du terme $[a]$ est petit : $\text{sinc}(\frac{\Delta\omega}{2v}D) \ll 1$. L'argument du sinus cardinal de $[b]$ peut être nul (donc le terme $[b]$ proche de 1), le terme $[a]$ est alors négligeable devant $[b]$. De plus, si l'on est suffisamment large bande ($\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 1$), c'est le terme sinc qui domine les fluctuations du terme \cos . Très schématiquement, la fonction de cohérence est non nulle jusqu'au premier zéro de $\cos(\frac{\omega}{v}(|SA - SB| - D))$. La contribution de la source S est cohérente sur une largeur typique qui correspond à la moyenne de la première arche du cosinus (entre 0 et $\frac{\pi}{2}$).

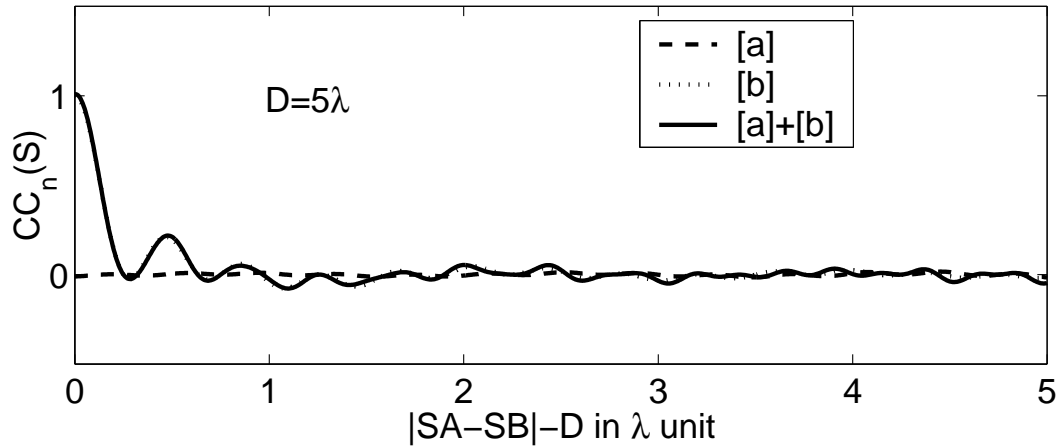


FIG. 7.3 – $[a]+[b]$: ressemblance entre la fonction de référence et la corrélation pour différentes positions de la source S , repérée par $\frac{|SA-SB|-D}{\lambda}$. La ressemblance est quantifiée par le coefficient de corrélation entre les formes d'onde $C_{AB}^S(\tau)$ et $G_{AB}(\tau)$. Les effets des termes $[a]$ et $[b]$ de l'équation 7.6 sont évalués séparément (en trait fragmenté et en trait pointillé). Le terme $[a]$ est toujours négligeable quelle que soit la position de la source.

Résultat :

La zone de cohérence est l'ensemble des points S du plan tels que $\frac{\omega}{v}(|SA-SB|-D) < \frac{\pi}{3}$. Cette zone est incluse à l'intérieur de deux hyperboles de foyers A et B , elle est analogue à une "anti-zone" de Fresnel d'un trajet AB à la pulsation ω . Toute source placée dans la zone autour de A contribue à l'émergence de la GF de $A \rightarrow B$ dans les corrélations, les sources placées dans la zone autour de B contribuent à la GF de $B \rightarrow A$. Les sources placées à l'extérieur de cette zone contribuent à un bruit résiduel.

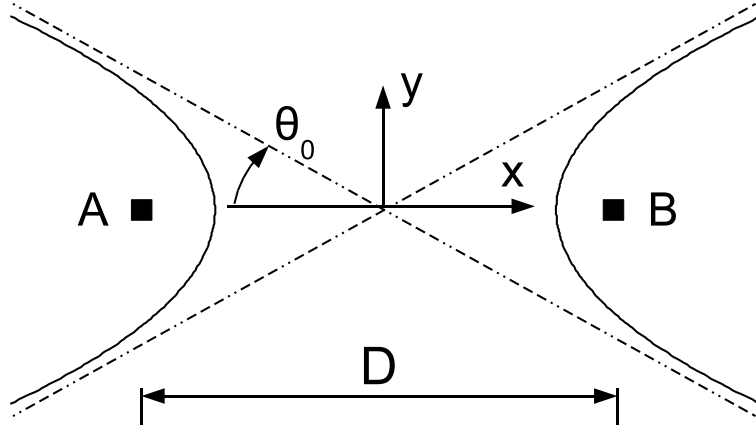


FIG. 7.4 – Représentation des hyperboles de cohérence autour des récepteurs A et B . En pointillé : les asymptotes des hyperboles, qui définissent l'angle limite de cohérence en champ lointain θ_0 .

Définition des hyperboles :

Les 2 hyperboles de cohérence sont définies par [Roux et al. (2004)] :

$$x^2 - y^2 \left(\left(\frac{D}{D - \lambda/6} \right)^2 - 1 \right) = \frac{D^2}{4} \left(1 - \left(\frac{D - \lambda/6}{D} \right)^2 \right) \quad (7.7)$$

soit, en coordonnées polaires :

$$r(\theta) = \frac{D^2 - (D - \lambda/6)^2}{\sin^2(\theta) - \left(\left(\frac{D}{D - \lambda/6} \right)^2 - 1 \right) \cos^2(\theta)} \quad (7.8)$$

Les branches de l'hyperbole définie par l'ensemble des points S tels que $(|SA - SB| - D) \frac{\omega}{v} < \pi/3$ sont définies par l'angle :

$$\theta_0 = \pm \arctan \sqrt{\left(\frac{D}{D - \lambda/6} \right)^2 - 1}$$

Asymptotiquement, lorsque $D \gg \lambda$,

$$\theta_0 \rightarrow \pm \sqrt{\frac{\lambda}{3D}}$$

Approximation de champ lointain

Roux et al. (2004) proposent de se placer dans le champ lointain du couple AB ($SA \gg AB$ et $SA \gg \lambda$). La ressemblance entre la corrélation et la fonction de référence est bien

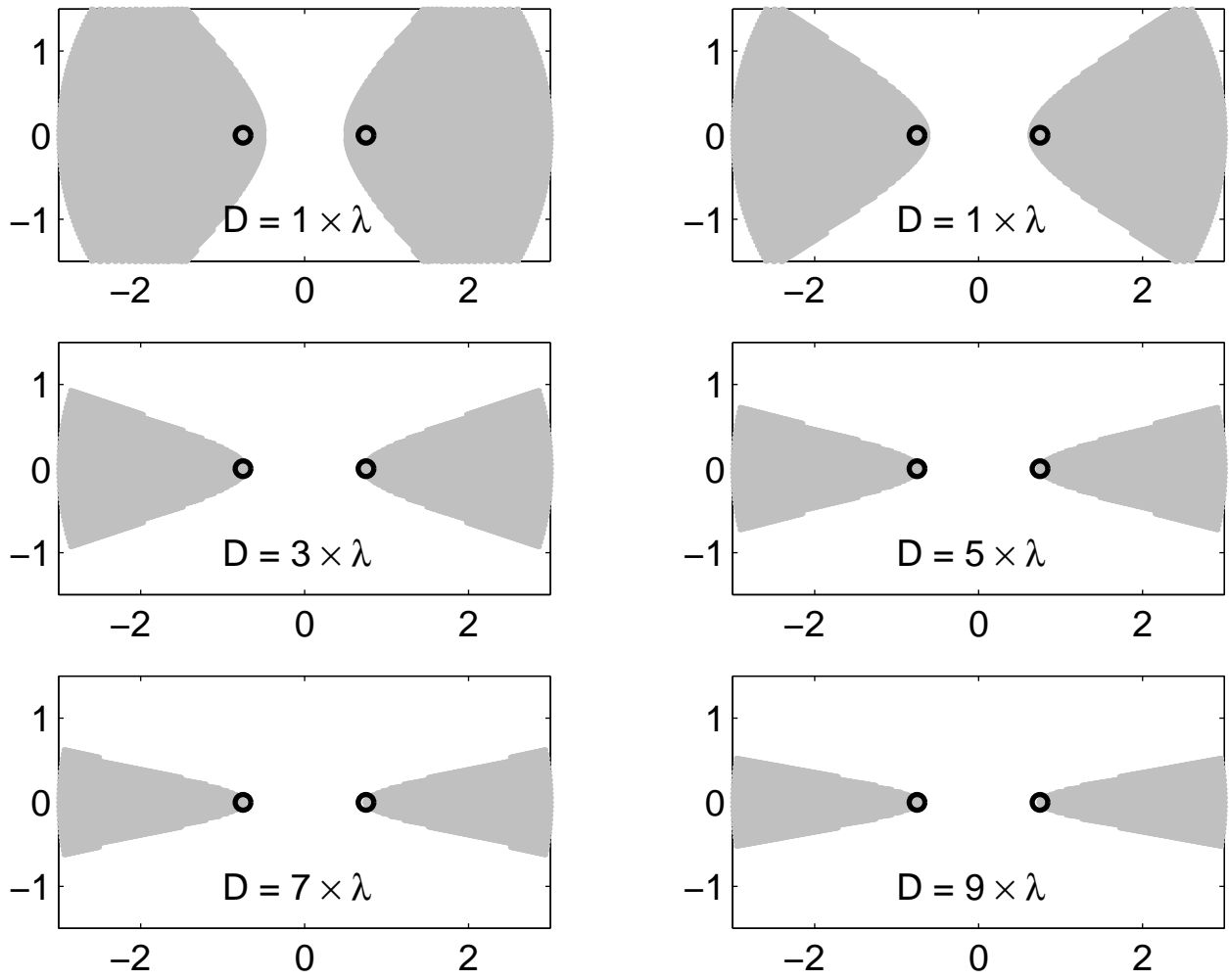


FIG. 7.5 – Évolution de la zone de cohérence ϑ pour différents rapports $\frac{D}{\lambda}$. Plus la distance D est grande, plus la zone de cohérence est petite, et plus la reconstruction de la GF par corrélation va être difficile (lente).

vérifiée dans une zone spatiale délimitée : la zone de cohérence caractéristique du réseau AB (*end-fire lobes*). La fonction de corrélation en coordonnées cylindriques ($R \gg D, \theta$) s'écrit alors :

$$CC(\theta) = \begin{cases} 2\Delta\omega \cos\left(\frac{\omega D}{v}(1 + \cos(\theta))\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega D}{2v}(1 + \cos(\theta))\right) & [a] \\ + 2\Delta\omega \cos\left(\frac{\omega D}{v}(1 - \cos(\theta))\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega D}{2v}(1 - \cos(\theta))\right) & [b] \end{cases} \quad (7.9)$$

Une nouvelle fois le terme [a] est négligeable, et le terme [b] à l'ordre 4 en θ donne :

$$CC(\theta) = 1 - \frac{\theta^4 D^2}{8v^2}(\omega^2 + \Delta\omega^2/12) + o(\theta^4) \quad (7.10)$$

Ce résultat confirme quantitativement que l'influence de la bande passante est un ordre de grandeur plus faible que l'influence de la fréquence centrale. D'autre part, l'angle limite de cohérence θ_0 qui vérifie $CC = 0$ est défini par :

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}v}{D\omega}} \approx \sqrt{\frac{\lambda}{2.2 D}}$$

7.3.3 Modélisation de la convergence en milieu homogène

Le modèle proposé est un modèle statistique qui repose sur une hypothèse de contribution cohérente ou incohérente d'une source aléatoirement positionnée.

- Si la source est dans la zone de cohérence de $A \rightarrow B$, alors sa contribution aux corrélations est cohérente à la fonction de référence, et son amplitude s'additionne linéairement à G_{AB}^+ .
- Si la source est dans la zone de cohérence de $B \rightarrow A$, alors sa contribution aux corrélations est cohérente à la fonction de référence, et son amplitude s'additionne linéairement à G_{AB}^- .
- Si la source est hors de ces deux zones, sa contribution est aléatoire, et son amplitude s'additionne de façon incohérente à b .

Pour N sources équi-réparties, N^+ est le nombre de sources présentes dans la zone de cohérence de AB , N^- est le nombre de sources présentes dans la zone de cohérence de BA , et N_i le nombre de sources qui ne sont dans aucune zone de cohérence. Alors :

$$C_{AB}^N = N^+ G_{AB}^+ + N^- G_{AB}^- + \sqrt{N_i} b \quad (7.11)$$

Notons ϑ^+ (resp. ϑ^-) l'aire de cohérence pour G_{AB}^+ (resp G_{AB}^-), et $\bar{\vartheta}$ l'aire complémentaire.

$$\frac{N^+}{N} = \frac{\vartheta^+}{\bar{\vartheta} + \vartheta^+ + \vartheta^-} \quad ; \quad \frac{N_i}{N} = \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta} + \vartheta^+ + \vartheta^-}$$

Le rapport d'aire est donc proportionnel à $\alpha = \frac{2\theta_0}{2\pi}$ (pour $R \gg \lambda$).

7.3.4 Vérification numérique du modèle

Encore une fois, il est très délicat de définir un rapport "Signal sur Bruit" dans les corrélations. Nous évaluons donc la rapidité de convergence au moyen du coefficient de corrélation entre les corrélations $\langle C_{AB} \rangle_N$ et la fonction de Green de référence G_{AB} . D'après le modèle proposé ci-dessus, le coefficient devrait être :

$$CC^+(N) = \frac{\int_{t>0} G_{AB}^+(t) C_{AB}(t) dt}{\sqrt{\int_{t>0} G_{AB}^{+2}(t) dt} \sqrt{\int_{t>0} C_{AB}^2(t) dt}} \quad (7.12)$$

$$CC^+(N) = \frac{N\alpha}{\sqrt{N^2\alpha^2 + N(1 - \alpha^2)}} \quad (7.13)$$

où α est la contribution moyenne d'une source :

$$CC^+(N = 1) = \alpha \approx \frac{\vartheta^+}{\vartheta + \vartheta^+ + \vartheta^-} \quad (7.14)$$

Ceci correspond approximativement à la proportion d'aire cohérente par rapport à la surface totale. Plus rigoureusement, le coefficient α , est obtenu par tirage aléatoire d'un très grand nombre de sources (10^6), chaque source étant pondérée par un facteur d'atténuation géométrique. Le coefficient de corrélation $CC^+(N)$ est estimé pour un nombre de sources variant de $N = 1$ à $N = 5000$. Les sources sont aléatoirement réparties dans l'espace 2-D. Les formes d'ondes obtenues par corrélation sont présentées Fig. 7.6 pour différentes distances D entre A et B .

Résultat :

Les courbes de convergence sont présentées Fig. 7.7 pour ces trois distances entre capteurs. Ces courbes permettent de vérifier :

1. qualitativement, la loi statistique de contribution des sources et l'approche en terme de contribution cohérente/incohérente (Eq. 7.13) :

$$CC(N) = \frac{N\alpha}{\sqrt{N^2\alpha^2 + N(1 - \alpha^2)}}$$

2. quantitativement, le calcul du coefficient α (Eq. 7.14) au moyen de la taille de la zone de cohérence :

$$\alpha \approx \frac{\vartheta}{\vartheta + \vartheta^+ + \vartheta^-}$$

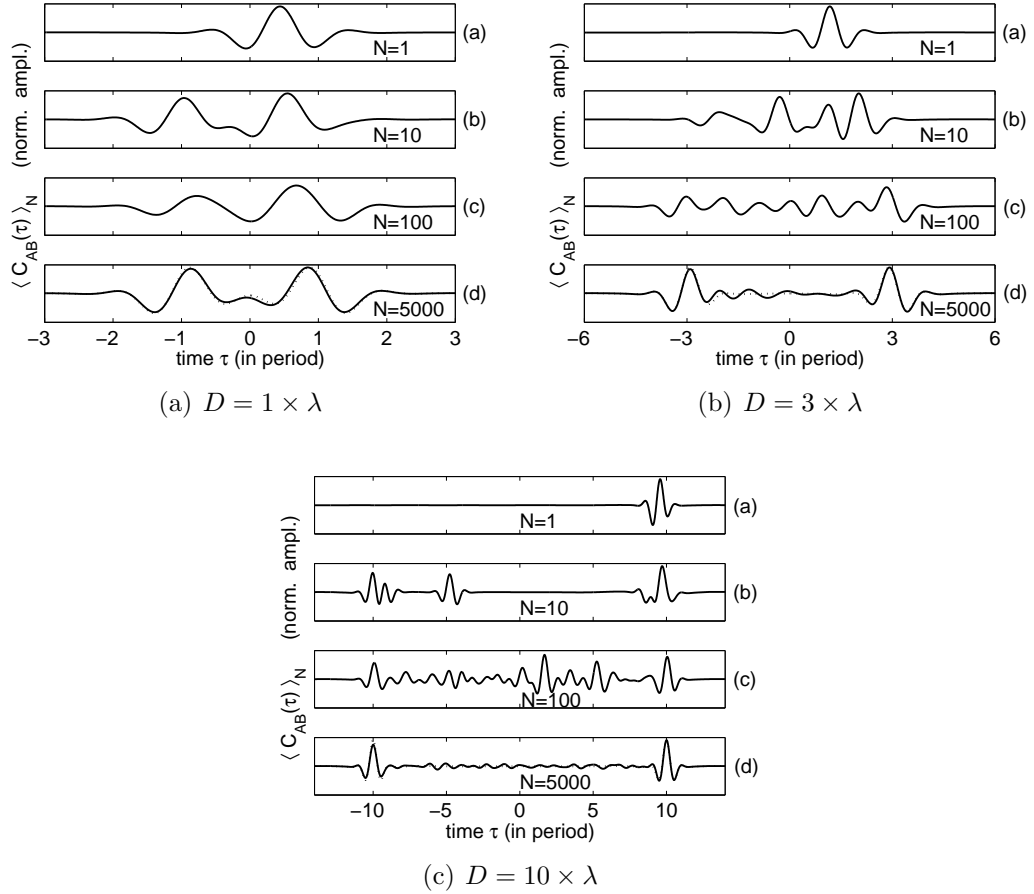


FIG. 7.6 – Corrélations $\langle C_{AB}(\tau) \rangle_N$ moyennées sur (a) $N=1$: le temps d'arrivée de l'impulsion est faux, il varie entre $-T$ et T où T est le temps d'arrivée de la GF de référence ; (b) $N=10$; (c) $N=100$; (d) $N=5000$ sources N , la fonction de Green de référence est représentée en pointillés. Sur cette dernière courbe, non seulement le temps d'arrivée T est reconstruit, mais aussi l'ensemble de la forme d'onde. Les calculs sont effectués pour 3 distances entre A et B (D).

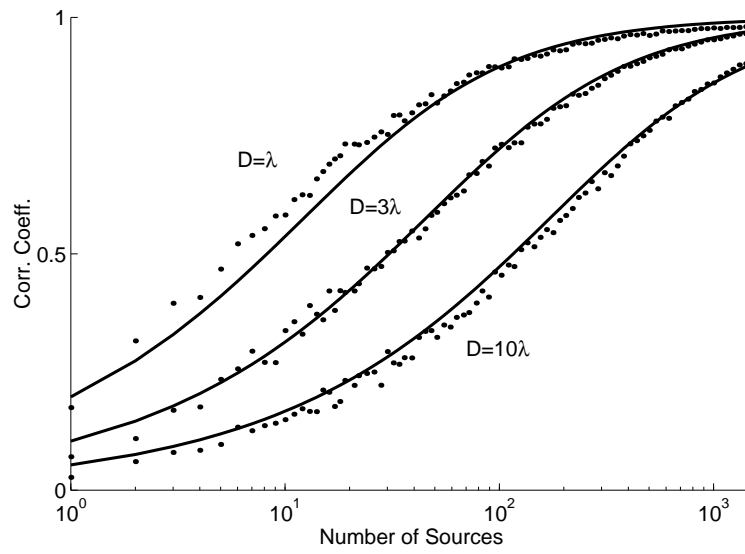


FIG. 7.7 – En pointillé : convergence des corrélations $\langle C_{AB}(\tau) \rangle_N$ en fonction du nombre de sources N pour différentes distances D entre A et B . La convergence est quantifiée par le coefficient de corrélation entre $\langle C_{AB}(\tau) \rangle_N$ et la GF de référence $G_{AB}(\tau)$. En trait plein : courbe théorique de convergence suivant l'Eq. 7.13 (pas de paramètre à ajuster).

7.3.5 Approximation asymptotique du RSB

Lorsque $D \gg \lambda$, nous avons montré que les hyperboles sont bornées par des asymptotes repérées par l'angle θ_0 :

$$\theta_0 = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{3D}}$$

la loi que nous venons de vérifier numériquement établit que le "signal" dans les corrélations augmente avec le nombre de sources dans la zone cohérente, et que le "bruit" augmente avec la racine du nombre de sources dans la zone complémentaire. La probabilité qu'une source se trouve dans la zone de cohérence est donc $\frac{2}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{3D}}$, d'où une approximation du rapport signal sur bruit :

$$RSB = \frac{2}{2\pi} \sqrt{\frac{N\lambda}{3D}} [2 - D] \quad (7.15)$$

Ce résultat est en accord avec le travail de [Weaver and Lobkis \(2005\)](#), à l'exception de la constante de normalisation qui varie en fonction de la définition du critère de convergence.

7.3.6 Estimation du RSB pour le bruit sismique

Supposons que le bruit sismique soit totalement décrit par une distribution aléatoire en temps et espace de sources, et que toutes les ondes sismiques constituant le bruit de fond soient des ondes de surface³. Soit T le temps d'enregistrement, et $\Delta\omega$ la bande passante de l'enregistrement. En milieu homogène, le nombre de sources indépendantes est $T\Delta\omega$. La convergence des corrélations vers la fonction de Green, estimée par le Rapport Signal sur Bruit, prend maintenant la forme :

$$RSB = \frac{2}{2\pi} \sqrt{\frac{T\lambda}{3D\Delta\omega}} [2 - D] \quad (7.16)$$

³tout le problème physique est donc 2-D. À 3-D, la loi de puissance de la convergence est différente.

7.4 Modélisation en milieu diffuseur (acoustique 2-D)

7.4.1 Observation : simulation numérique

Pour étudier quantitativement et avec précision la convergence des corrélations vers la GF de référence, les expériences ultrasonores ou sismologiques sont délicates : elles mettent en oeuvre un grand nombre de paramètres, ces derniers en général n'étant pas contrôlés (taille et position des diffuseurs, position des sources et forme d'onde émise à la source...). De surcroît, quelques paramètres viennent dégrader la qualité des signaux : l'absorption, le bruit ambiant. Nous proposons d'employer une simulation numérique qui va permettre de restreindre le nombre de paramètres de la convergence en milieu diffus à un minimum : le nombre de sources N , le libre parcours moyen de transport dans le milieu ℓ^* , et la distance entre les points de mesure A et B : D .

La simulation utilisée repose sur un code aux différences finies [Tanter (1999)]. La taille de la grille 2-D est $33\lambda \times 33\lambda$. La taille de maille est $\lambda/30$, le pas temporel d'échantillonnage est $T_0/42.5$. La longueur d'onde moyenne est $\lambda = 1.5 \text{ mm}$, correspondant à une fréquence centrale des ondes de $f_0 = 1 \text{ MHz}$ dans l'eau ($v = 1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$). 381 diffuseurs identiques (disques creux de rayon $a = 0.25 \text{ mm}$) sont placés aléatoirement dans un espace 2-D avec une densité de $n = 0.1524 \text{ mm}^{-1}$, leurs sections de diffusion ont été mesurées numériquement : $\sigma = 1.6 \text{ mm}$ et $\sigma^* = 1.1 \text{ mm}$. Le libre parcours moyen de transport est donc dans ce milieu $\ell^* = 6 \text{ mm}$. Le schéma de la géométrie utilisé est proposé Fig. 7.8.

Chaque réponse impulsionnelle $h_{SA}(t)$ et $h_{SB}(t)$ est calculée sur une durée de $1000 \mu\text{s}$ (1000 périodes). La corrélation est calculée sur une fenêtre de temps $|\tau| < 70 \mu\text{s}$, moyennée sur les $1000 \mu\text{s}$ de signal disponible, puis sur les $N = 1800$ sources :

$$\langle C_{AB}(-70 \mu\text{s} < \tau < 70 \mu\text{s}) \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{S=1}^N \int_0^{1000 \mu\text{s}} h_{SA}(t) h_{SB}(t + \tau) dt \quad (7.17)$$

Cette corrélation moyenne est ensuite comparée à la réponse impulsionnelle de référence, Fig. 7.9. Le coefficient de corrélation CC entre les deux formes d'onde atteint 95.6 %.

Deux types de traitements sont ensuite réalisés :

1. La convergence est étudiée en fonction de la distance $D = AB$.
2. Pour une distance donnée, la convergence est étudiée en fonction de l'âge de la coda reconstruite.

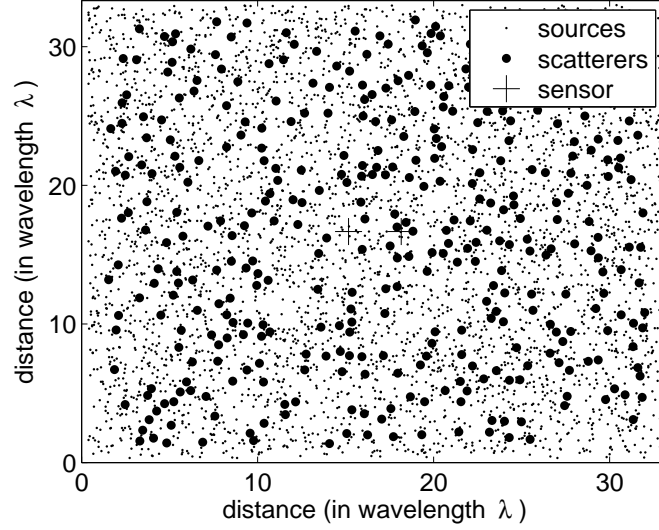


FIG. 7.8 – Géométrie de la simulation par différence finie d’ondes diffuses (code de [Tanter \(1999\)](#), bords absorbants). Les unités de longueur sont adimensionnées par la longueur d’onde λ . 381 diffuseurs sont répartis aléatoirement dans le fluide (disques noirs), ainsi que 1800 sources (points). La position des 2 capteurs A et B est représentée par une croix.

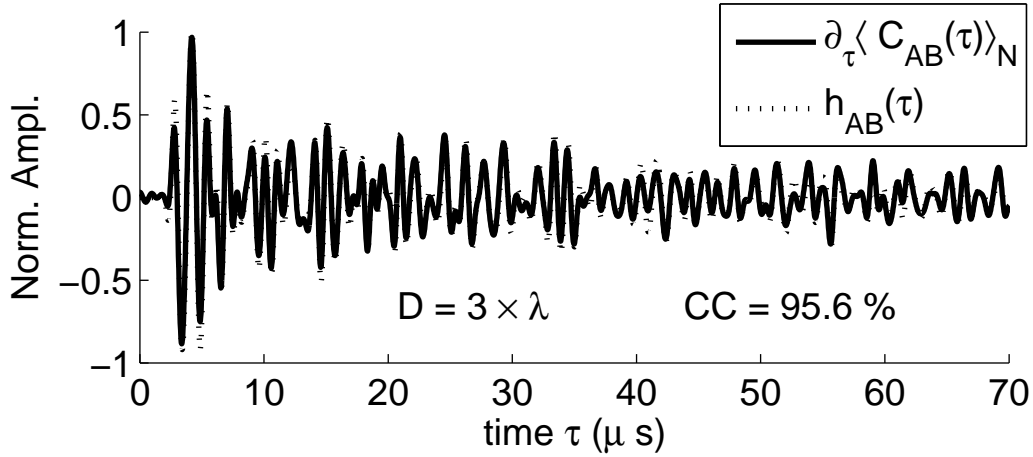


FIG. 7.9 – Le champ diffus reçu en A et B est corrélé, la corrélation $\langle C_{AB}(\tau) \rangle$ est moyennée sur $N = 1800$ sources, sa dérivée temporelle est représentée en trait plein. La distance entre A et B est $D = 3 \times \lambda$. En trait pointillé : la GF de référence $h_{AB}(\tau)$. Le coefficient de corrélation CC entre les deux formes d’onde atteint 95.6 %.

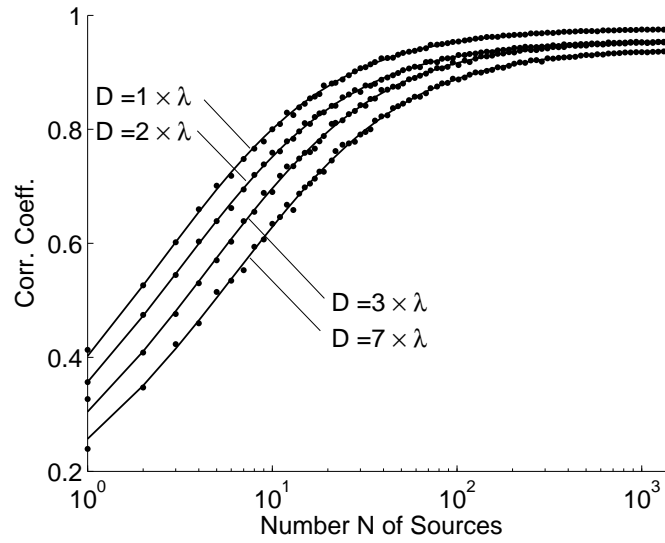


FIG. 7.10 – Convergence des corrélations en fonction du nombre de sources. La convergence est estimée grâce au coefficient de corrélation $CC(N)$ entre les formes d’ondes, chaque résultat est affiché par un point, la convergence est quantifiée pour 4 distances différentes entre A et B : $D = 1, 2, 3, 7 \times \lambda$. En trait plein est représenté le meilleur fit des données par l’équation 7.19, où l’on ajuste les deux paramètres α et β . Plus la distance augmente, plus la convergence est difficile. Cependant, pour une distance donnée AB , la convergence est beaucoup plus rapide (facile) en milieu diffus qu’en milieu homogène (à comparer avec la Fig. 7.7).

Convergence CC en fonction de la distance $D = AB$

Le coefficient de corrélation entre les formes d’ondes est moyenné sur les $70 \mu s$ de signal reconstruit, et évalué en fonction du nombre de sources N utilisées ($N = 1 \rightarrow 1800$), et en fonction de la distance D ($D = 1 \rightarrow 7\lambda$) :

$$CC(N, D) = \frac{\int_0^{t=70 \mu s} G_{AB}(t) \partial_t \langle C_{AB}(t) \rangle_N dt}{\sqrt{\int_0^{t=70 \mu s} G_{AB}^2(t) dt} \sqrt{\int_0^{t=70 \mu s} \partial_t \langle C_{AB}(t) \rangle_N^2 dt}} \quad (7.18)$$

Les résultats sont présentés Fig. 7.10. Un phénomène de saturation est observé. En effet, au-delà d’une certaine quantité de signal traité, le coefficient CC sature à une valeur sensiblement inférieure à 1. Pour tenir compte de cet effet, nous proposons de modifier de façon empirique la loi 7.13. Le signal cohérent s’additionne linéairement avec le nombre de sources, son amplitude est dirigée par $N\alpha$. Une partie du bruit est additionnée de façon cohérente, son amplitude augmente comme $N\beta$. L’autre partie du bruit est additionnée de façon incohérente, son amplitude croît comme $\sqrt{N(1 - \alpha^2 - \beta^2)}$. De façon heuristique, la

loi de convergence 7.13 devient :

$$CC(N) = \frac{N\alpha}{\sqrt{N^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + N(1 - \alpha^2 - \beta^2)}} \quad (7.19)$$

Au premier ordre, la convergence dépend du paramètre α , sans saturation. Au deuxième ordre, nous avons rajouté un paramètre β qui tient compte d'une saturation de la convergence pour un grand nombre de sources. Au troisième ordre, et en toute rigueur, nous devrions plutôt modéliser un très fort ralentissement de l'évolution de CC , et pas une saturation. Pour les nombres de sources utilisées ($N < 10^4$), cette dernière modification n'est donc pas utile.

En toute rigueur, $CC(N)$ doit tendre vers 1 lorsque l'on dispose d'un nombre infini de sources. Cependant, pour une distribution aléatoire 2-D, cette limite n'est pas observée, ou en tout cas correspond à un nombre de sources inaccessible ($10^5, 10^6 \dots$). Ce fit (en trait plein Fig. 7.7) est donc ajusté grâce aux deux paramètres α et β , et reproduit les données simulées (points Fig. 7.7). Ces courbes permettent de mettre en évidence deux résultats importants :

- La diffusion multiple accélère la convergence. En effet, pour une distance D donnée, la courbe de convergence en milieu diffus est très au-dessus de la courbe de convergence en milieu homogène (*cf* Fig. 7.7). Cela se quantifie grâce au paramètre α . Pour $D = 3\lambda$, $\alpha = 0.1$ en milieu homogène, et $\alpha = 0.3$ en milieu diffus. Lorsque nous utilisons une seule source en milieu homogène, nous traitons une source réelle en milieu diffusant, ainsi qu'un grand nombre de sources secondaires correspondant à la réponse de tous les diffuseurs excités pendant les $1000 \mu s$ d'enregistrement. Si l'on se reporte à la Fig. 7.7, tout se passe comme si $1000 \mu s$ contiennent l'équivalent de $N = 10$ sources indépendantes.
- La diffusion multiple introduit un phénomène de saturation. Ce phénomène se quantifie au moyen du coefficient β . Lorsque l'ensemble du milieu est éclairé, les diffuseurs agissent chacun comme une source secondaire. Si le temps d'enregistrement augmente, les diffuseurs sont à nouveau excités, mais leur contribution est identique (en première approximation), ils n'ajoutent pas d'information nouvelle.

Convergence CC en fonction de l'âge de la coda reconstruite

Nous appelons *l'âge* de la coda reconstruite, la fenêtre de temps $[\tau_1 \tau_2]$ de la corrélation $\partial_\tau \langle C_{AB}(\tau) \rangle_N$ (*cf* Fig. 7.10). Les résultats sont présentés Fig. 7.11 pour une distance $D = 3 \times \lambda$ et pour trois fenêtres consécutives d'âge. Très qualitativement, plus nous cherchons à reconstruire la coda tardive, plus la convergence est lente. Une explication heuristique peut-être évoquée : lorsque l'on cherche à reconstruire la coda sur une fenêtre de temps autour de τ , le critère de zone de taille de zone de cohérence n'est pas défini pour le temps de trajet t_{AB} , mais pour un temps $\tau > t_{AB}$. Les zones de cohérence sont donc plus petites, le paramètre α est plus petit, ce qui entraîne une convergence plus lente. Une étude quantitative de ce phénomène reste à faire.

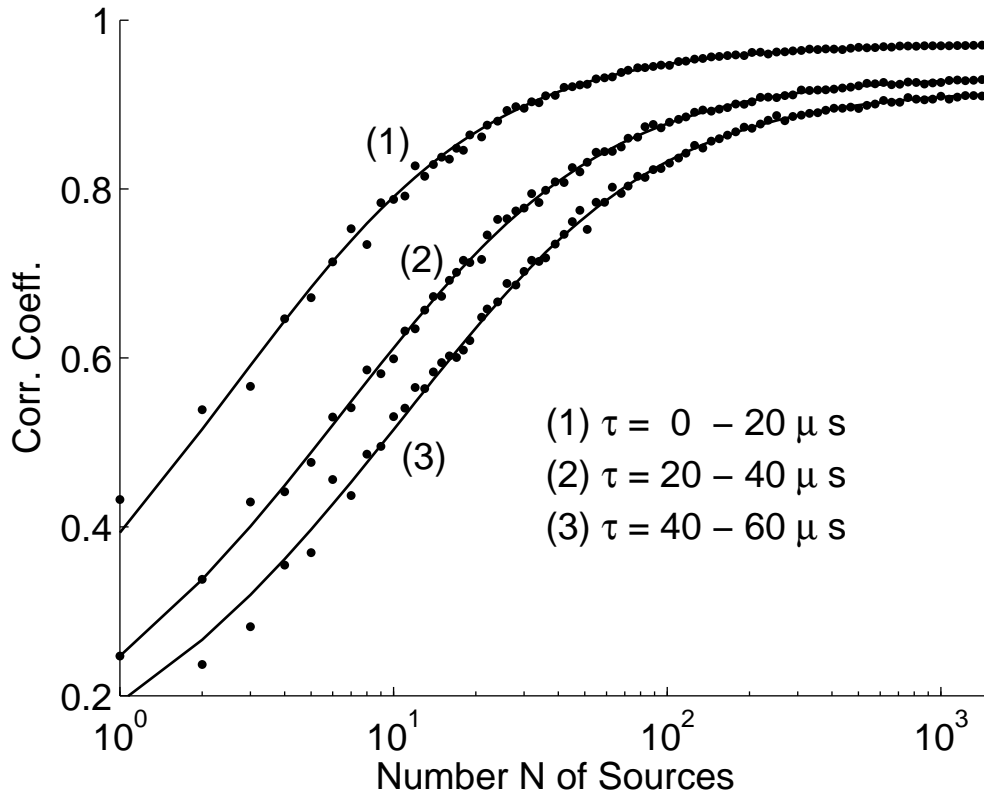


FIG. 7.11 – Convergence des corrélations $\partial_\tau \langle C_{AB}(\tau) \rangle_N$ vers la GF de référence, en fonction de l'âge de la coda et du nombre de sources. La corrélation est découpée en trois fenêtres temporelles (l'âge τ) : (1) $0 - 20 \mu s$, (2) $20 - 40 \mu s$, (3) $40 - 60 \mu s$. Plus nous cherchons à reconstruire la coda tardive, plus la convergence est difficile.

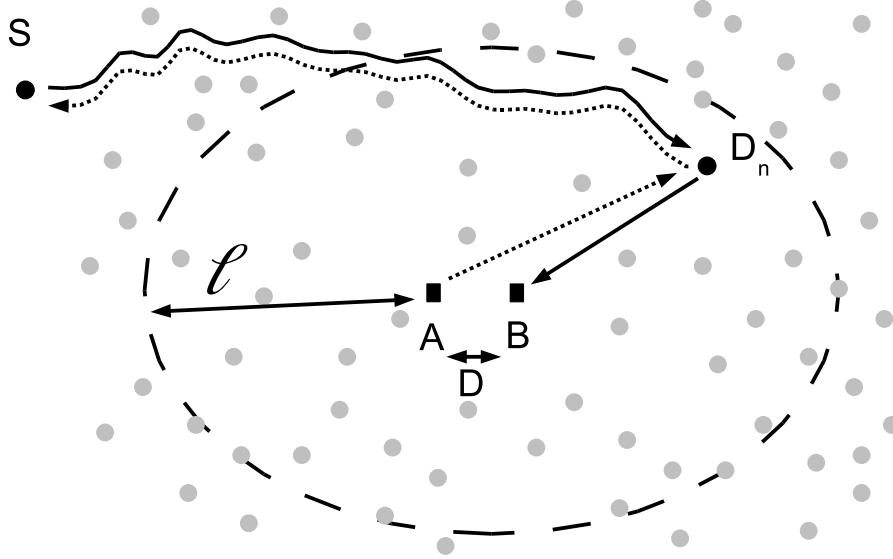


FIG. 7.12 – Schéma de propagation des ondes de la source S vers les capteurs A et B . La propagation représentée passe par le dernier diffuseur D_n . L'onde enregistrée en A ou B est la somme de tous les trajets pour toutes les positions possibles du dernier diffuseur. Le trait pointillé correspond à la conjugaison de phase (la corrélation). Ce schéma indique clairement la compensation de phase des trajets de S à D_n , seul subsiste dans la corrélation la différence de phase entre les deux trajets $D_n - A$ et $D_n - B$.

7.4.2 Début de modélisation

Voici un début de modélisation quantitative. Décomposons le champ enregistré en A et B en un trajet commun de S jusqu'au dernier diffuseur D_n , puis supposons que le trajet de D_n à A et B est un trajet libre simplement atténué par diffusion élastique $e^{-\frac{D_n A}{2\ell}}$ et $e^{-\frac{D_n B}{2\ell}}$. D_n réémet une coda qui correspond aux trajets SD_n . Alors :

$$s_A(t) = \int coda(t) \otimes G(D_n, A, t) dD_n \quad ; \quad s_B(t) = \int coda(t) \otimes G(D_n, B, t) dD_n$$

$$C_{AB}(\tau) = \int coda(t) \otimes coda(-t) \otimes \int G(D_n, A, t) G(D_n, B, t + \tau) dt dD_n$$

Si D_n est dans la zone de cohérence AB , alors $\int G(D_n, A, t) G(D_n, B, t + \tau) dt$ est G_{AB} . L'intensité de la fonction reconstruite est l'intensité du pic de l'autocorrélation de la coda, c'est-à-dire son intensité : $\int coda^2(t) dt$. Les fluctuations autour du pic d'autocorrélation ont une amplitude proportionnelle à la racine du nombre de grains d'information contenus dans la coda : $\sqrt{\frac{1}{\Delta\omega T}}$

La présence du milieu diffuseur a donc deux effets :

1. avec une seule source, il est possible de tirer partie des diffuseurs comme des sources secondaires, et donc de remplir de façon plus efficace la zone de cohérence.

2. l'autocorrélation de la coda rajoute du bruit : les lobes secondaires ;

Les diffuseurs qui vont agir comme des sources secondaires sont dans une zone dont la taille caractéristique est ℓ . Les diffuseurs à l'extérieur de ce cercle, eux, contribuent à la coda(t). Si n est la densité de diffuseurs, alors il y a $n\vartheta$ diffuseurs dans la zone cohérente, et $n\bar{\vartheta}$ dans la zone incohérente. Cela pourrait permettre de quantifier le coefficient α :

$$\alpha \sim \sqrt{n} \frac{\vartheta}{2\vartheta + \bar{\vartheta}} \quad (7.20)$$

Le coefficient β , lui, est calculé en fonction du nombre de sources indépendantes secondaires (diffuseurs dans le cercle de rayon ℓ), et du nombre d'informations indépendantes portées par chacune des contributions des diffuseurs. Nous pouvons nous attendre à ce que le temps de Thouless τ_D apparaisse dans ce développement.

Modélisation de l'asymétrie

Il est possible avec cette analyse d'interpréter l'asymétrie temporelle observée dans les corrélations. Une source proche de A va d'abord éclairer les diffuseurs qui entourent A , en particulier ceux qui sont dans la zone de cohérence de A . Au début de la coda $h_{SA}(t)$, la corrélation va donc faire apparaître le terme $G_{AB}(\tau)$, et pas $G_{BA}(\tau)$. Ensuite, quand la taille du halo diffus augmente, les deux zones de cohérence sont alors éclairées avec la même intensité. Les corrélations se symétrisent progressivement. Le temps qui caractérise la croissance du halo diffus est le temps libre moyen t^* , nous retrouvons ici un résultat proche de celui proposé par [van Tiggelen \(2003\)](#). Ce résultat devra être confirmé par une série de simulations numériques.

Chapitre 8

Conclusion

Le travail présenté dans ce manuscrit a porté sur l'expérimentation et la modélisation des ondes sismiques de la coda et des ultrasons en milieu hétérogène. Nous avons proposé deux méthodes d'analyse de l'information portée par la phase des signaux multiplement diffusés. Cela signifie l'exploitation des petits détails de la coda, des petites fluctuations qui la constituent. La notion de phase dans la coda se rapporte donc aux formes d'ondes enregistrées, ce qui est différent d'une analyse de l'intensité moyenne (mesure de la décroissance exponentielle par exemple). Ces deux méthodes sont :

- Une expérience de localisation faible des ondes sismiques.
- Une technique de corrélation des signaux diffus, qui permet de reconstruire la fonction de Green élastique ou acoustique entre deux capteurs passifs. Cela permet de faire de l'imagerie "sans source", avec les ondes de la coda par exemple, ou avec le bruit ambiant. Autrement dit, avec cette technique, nous utilisons les détails de la coda (et même du bruit) pour imager la Terre.

Le développement de ces deux techniques montre l'intérêt d'enregistrer la coda sismique et le bruit sismique en plus des arrivées des ondes directes d'un tremblement de Terre.

Localisation faible des ondes sismiques

L'effet de localisation faible des ondes sismiques (analogue à une expérience de rétrodiffusion cohérente en optique ou en acoustique) a été observé sur un site naturel volcanique. Cette expérience de sismique active permet d'observer une surintensité rétrodiffusée à la source, dans la coda. Cette observation apporte un certain nombre d'informations :

1. Elle met en évidence de façon directe la présence de diffusion multiple dans la coda.
2. Elle permet de quantifier le degré d'hétérogénéité du milieu de propagation grâce à la mesure du temps de libre parcours moyen de transport t^* .

3. Elle permet de définir la taille de la fenêtre temporelle dans laquelle des enregistrements sismiques peuvent être exploités pour l'imagerie en sismique réflexion.

Cette expérience ouvre des perspectives variées :

- Quelle est la valeur de t^* pour un milieu donné en fonction de la fréquence ?
- Quelle est la part de la diffusion de surface par rapport à la diffusion de volume ?
- Cette expérience peut-elle être généralisée à tous les milieux géologiques afin de caractériser leur degré d'hétérogénéité ?
- En particulier, peut-on envisager d'effectuer cette technique de mesure à plus haute fréquence (kHz) ? Facile à réaliser à ces fréquences, cette mesure renseigne sur la texture des matériaux géologiques à l'échelle de quelques dizaines de centimètres.
- À plus basse fréquence, cette expérience de localisation faible peut-elle caractériser la propagation des ondes sismiques en ville, notamment dans la gamme de fréquence de résonance des bâtiments ? À ces fréquences, il est probable qu'un couplage très fort existe entre le sol et les immeubles, ainsi qu'entre les immeubles eux-mêmes. Cette observation a des conséquences sur l'évaluation du risque sismique en ville.

Imagerie passive

Un principe d'imagerie en champ diffus a été développé dans la seconde partie du manuscrit. Ce principe a été récemment proposé par [Weaver and Lobkis \(2001\)](#), et appliqué dans une cavité d'aluminium aux fréquences ultrasonores. Il repose sur la corrélation temporelle de deux enregistrements de champs élastiques ou acoustiques aléatoires (champ diffus de la coda sismique ou ultrasonore, ou bien bruit ambiant).

Cette technique a d'abord été généralisée aux milieux ouverts et diffusants. Nous avons montré qu'en effectuant une moyenne sur les sources, les corrélations convergent exactement vers la fonction de Green entre les deux points de mesure. Une interprétation physique de ce principe a été proposée, elle est basée sur une analogie rigoureuse entre les corrélations de champs et le retournement temporel des ondes. Cette interprétation a permis d'expliquer divers phénomènes :

- La symétrie temporelle des corrélations : elle dépend d'une part de la distribution des sources par rapport au couple de capteurs passifs, ainsi que du degré d'hétérogénéité du milieu, d'autre part de la fenêtre temporelle utilisée lors de la corrélation. La diffusion aide à reconstruire la GF entre deux points par corrélation, car les diffuseurs agissent comme des sources secondaires.
- L'efficacité de la reconstruction augmente avec le nombre de sources employées (rôle de la moyenne sur les sources).
- La possibilité de corrélérer uniquement le signe des formes d'ondes (corrélation 1-bit).

Une étude plus approfondie du phénomène d'asymétrie temporelle des corrélations a été menée. Des simulations numériques ont permis de vérifier quantitativement le rôle de

la position des sources et de la diffusion dans la restauration de la symétrie temporelle. Ces observations numériques ont été confirmées par le traitement de coda sismiques acquises en Alaska.

Une expérience de laboratoire reproduisant de façon analogique le comportement de la croûte terrestre pour la propagation des ondes a été réalisée. Cette expérience (source laser, détection laser) a permis de vérifier l'émergence de l'onde de Rayleigh dans les corrélations de champ diffus élastique avec surface libre. Lorsque la diffusion n'est pas présente, aucune reconstruction d'onde de Rayleigh n'est possible. Le couplage entre les ondes de surface et les ondes de volume a été étudié en détail.

La technique d'imagerie passive a ensuite été appliquée :

- à l'imagerie d'un milieu stratifié par tomographie passive ultrasonore. Cette image a été obtenue par reconstruction de l'onde directe le long d'un réseau de capteurs placés au travers de 4 couches de fluides.
- à l'imagerie d'une interface grâce à la reconstruction passive d'une onde ultrasonore réfléchie sur une interface eau/aluminium.
- à l'imagerie de deux diffuseurs isolés par reconstruction passive des trajets réfléchis (et même multiples réfléchis) entre le capteur et les deux diffuseurs. Dans cette expérience, l'autocorrélation du champ moyenné sur un ensemble de sources lointaines donne exactement la GF du capteur sur lui-même. Cette GF comprend des contributions de réflexions multiples, faibles et tardives.

Enfin, le principe de corrélation d'ondes diffuses s'applique de façon équivalente au champ aléatoire constituant le bruit sismique. La reconstruction passive d'une onde de Rayleigh a été obtenue par corrélation de bruit dans la gamme de fréquence 1-10 Hz. Le bruit sismique a été enregistré par des géophones implantés sur la Lune pendant la mission Apollo 17 (1972). Cette onde de surface dispersive permet d'imager les dix premiers mètres du sous-sol lunaire. A la différence de la Terre, le bruit lunaire n'est ni d'origine anthropique (activité industrielle), ni d'origine météorologique ou océanique, mais d'origine thermique. En effet un très fort couplage du bruit (et de la reconstruction de la GF) avec le rayonnement solaire a été observé. Cette expérience démontre la faisabilité de la technique d'imagerie passive par corrélation de bruit sismique sur d'autres planètes que la Terre, elle pourra donc être plus largement mise en oeuvre dans les futures missions spatiales, en particulier sur la Lune et sur Mars.

Bibliographie

- Abubakirov, I., and A. Gusev (1990), Estimation of scattering properties of lithosphere of kamchatka based on monte-carlo simulations of record envelope of a near earthquake, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *64*, 52–67.
- Aki, K. (1969), Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves, *J. Geophys. Res.*, *74*, 615–618.
- Aki, K., and B. Chouet (1975), Origin of coda waves, sources and attenuation, *J. Geophys. Res.*, *80*, 3322–3342.
- Aki, K., and V. Ferrazzini (2000), Origin of coda waves, sources and attenuation, *J. Geophys. Res.*, *105*, 617.
- Aki, K., and P. G. Richards (2002), *Quantitative Seismology, 2d Ed.*, University Science Book.
- Aki, K., A. Christofferson, and E. Husebye (1977), Determination of the three-dimensional structure of the lithosphere, *J. Geophys. Res.*, *82*, 277–296.
- Akkermans, E., and G. Montambaux (2004), *Physique mésoscopique des électrons et des photons*, CNRS Ed., EDP Sciences.
- Akkermans, E., P. E. Wolf, and R. Maynard (1986), Coherent backscattering of light by disordered media : Analysis of the peak line shape, *Phys. Rev. Lett.*, *56*, 1471.
- Al’tshuler, B. L., A. G. Aronov, and B. Z. Spivak (1981), Magnetoresistance of thin films and of wires in a longitudinal magnetic field, *JETP Lett.*, *33*, 94.
- Astiz, L., P. Earle, and P. Shearer (1996), Global stacking of broadband seismograms, *Seis. Res. Lett.*, *67*, 8–18.
- Bakulin, A., and R. Calvert (2004), Virtual source : new method for imaging and 4d below complex overburden, in *SEG Expanded Abstracts 23*.
- Bayer, G., and T. Niederdrank (1993), Weak localizatoin of acoustic waves in strongly scattering media, *Phys. Rev. Lett.*, *70*, 3884.

- Beaudoin, B., G. Fuis, W. Mooney, W. Nokleberg, and N. Christensen (1991), Thin, low-velocity crust beneath the Southern Yukon Tanana terrane, East central Alaska : Results from Trans-Alaska crustal transect refraction/wide-angle reflection data, *J. Geophys. Res.*, *97*, 1921–1942.
- Berkovits, R., and S. Feng (1994), Correlations in coherent multiple scattering, *Phys. Rep.*, *238*, 135–172.
- Blomgren, P., G. Papanicolaou, and H. Zhao (2002), Super-resolution in time-reversal acoustics, *J. Acoust. Soc. Am.*, *111*, 230–248.
- Campillo, M., and A. Paul (2003), Long range correlations in the diffuse seismic coda, *Science*, *299*, 547–549.
- Campillo, M., L. Margerin, and N. Shapiro (1999), *Waves in complex media*, J.P. Fouque Ed., NATO ASI Series, Kluwer.
- Caron, J. M., A. Gauthier, A. Schaaf, J. Ulysse, and J. Wozniak (1995), *Comprendre et enseigner la planète Terre*, Ophrys.
- Cassereau, D., and M. Fink (1992), Time-reversal of ultrasonic fields - part III : theory of the closed time-reversal cavity, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr.*, *39*, 579–592.
- Chandrasekhar, S. (1950), *Radiative Transfer*, Oxford University Press.
- Collino, F., and P. Joly (1995), Absorbing boundary conditions for the finite element solution of 3D Maxwell's equation, *IEEE Trans. Magn.*, *31*, 1696–1701.
- Cooper, M. R., and R. L. Kovach (1974), Lunar near surface structure, *Rev. Geophys. Space Phys.*, *12*, 291.
- Cowan, M. L., J. H. Page, and D. A. Weitz (2000), Velocity fluctuations in fluidized suspensions probed by ultrasonic correlation spectroscopy, *Phys. Rev. Lett.*, *85*, 453.
- de Rosny, J. (2000), Milieux réverbérants et réversibilité, Ph.D. thesis, Université P&M Curie, Paris-6.
- de Rosny, J., and M. Fink (2002), Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink, *Phys. Rev. Lett.*, *89*, 124 301.
- de Rosny, J., A. Tourin, and M. Fink (2000), Coherent backscattering of an elastic wave in a chaotic cavity, *Phys. Rev. Lett.*, *84*, 1693.
- Derode, A., A. Tourin, and M. Fink (1999), Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering, *J. Appl. Phys.*, *85*, 6343–6352.

- Derode, A., A. Tourin, and M. Fink (2000), Limits of time-reversal focusing through multiple scattering : Long-range correlation, *J. Acoust. Soc. Am.*, *107*, 2987–2998.
- Derode, A., M. Tanter, L. Sandrin, A. Tourin, and M. Fink (2001a), Numerical and experimental time-reversal of acoustic waves in random media, *Journal of Computational Acoustics*, *9*, 991–998.
- Derode, A., A. Tourin, and M. Fink (2001b), Random multiple scattering of ultrasound. I. Coherent and ballistic waves, *Phys. Rev. E*, *64*, 36 605.
- Derode, A., A. Tourin, and M. Fink (2001c), Random multiple scattering of ultrasound. II. Is time-reversal a self-averaging process?, *Phys. Rev. E*, *64*, 36 606.
- Derode, A., E. Larose, M. Campillo, and M. Fink (2003a), How to estimate the Green's function of a heterogeneous medium between two passive sensors ? application to acoustic waves, *Appl. Phys. Lett.*, *83*, 3054–3056.
- Derode, A., E. Larose, M. Tanter, J. de Rosny, A. Tourin, M. Campillo, and M. Fink (2003b), Recovering the Green's function from field-field correlations in an open scattering medium, *J. Acoust. Soc. Am.*, *113*, 2973–2976.
- Derode, A., A. Tourin, J. de Rosny, M. Tanter, S. Yon, and M. Fink (2003c), Taking advantage of multiple scattering to communicate with time-reversal antennas, *Phys. Rev. Lett.*, *90*, 14 301.
- Derode, A., V. Mamou, F. Jenson, F. Padilla, and P. Laugier (2005), Multiple scattering of ultrasound in bone, *submitted to Appl. Phys. Lett.*
- Draeger, C., and M. Fink (1999), One channel time-reversal in chaotic cavities, *J. Acoust. Soc. Am.*, *105*, 618–625.
- Duennebie, F., and G. H. Sutton (1974), Thermal moonquakes, *JGR*, *79*, 4351–4363.
- Duvall, T., S. Jefferies, J. Harvey, and M. Pomerantz (1993), Time distance helioseismology, *Nature*, *362*, 430–432.
- Dziewonski, A., and D. Anderson (1981), Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *25*, 297.
- Faran, J. J. (1951), Sound scattering by solid cylinders and spheres, *J. Acoust. Soc. Am.*, *23*, 405–418.
- Ferris, A., G. Abers, D. Christensen, and E. Veenstra (2003), High resolution image of the subducted pacific, *Earth Planet. Sci. Lett.*, *214*, 575–588.
- Fink, M., D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J. Thomas, and F. Wu (1992), Time reversal of ultrasonic fields—part I : Basic principles, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr.*, *39*, 555–566.

- Fink, M., D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J. Thomas, and F. Wu (2000), Time-reversed acoustics, *Rep. Prog. Phys.*, *63*, 1933–1995.
- Fink, M., W. A. Kuperman, J.-P. Montagner, and A. Tourin (2002), *Imaging of Complex Media with Acoustic and Seismic Waves*, Springer.
- Forestier, N., and V. Nougier (1998), The effects of muscular fatigue on the coordination of a multijoint movement in human, *Neurosci. Lett.*, *252*, 187.
- Golombek, M. P., W. B. Banerdt, K. L. Tanaka, and D. M. Trally (1992), A prediction of mars seismicity from surface faulting, *Science*, *258*, 979–981.
- Heckmeier, M., S. E. Skipetrov, G. Maret, and R. Maynard (1997), Imaging of dynamic heterogeneities in multiple-scattering media, *J. Opt. Soc. Am.*, *B14*, 185–191.
- Heiken, G., D. Vanniman, and B. French (1991), *Lunar Sourcebook - Users Guide to the Moon*, Cambridge University Press.
- Hennino, R., N. Trégourès, N. M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B. A. van Tiggelen, and R. L. Weaver (2001), Observation of equipartition of seismic waves, *Phys. Rev. Lett.*, *86*, 3447.
- Herrmann, R. B., and C. J. Ammon (2004), *Computer Programs in Seismology : Surface Waves, receiver functions and crustal structure*, Saint Louis University.
- Horvath, P., G. V. Latham, Y. Nakamura, and H. J. Dorman (1980), Lunar near-surface shear wave velocities at the apollo landing sites as inferred from spectral amplitude ratios, *J. Geophys. Res.*, *85*, 6572–6578.
- Hoshiaba, M. (1991), Simulation of multiple scattered coda wave excitation based on the energy conservation law, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *67*, 123–136.
- Kawabata, A. (1982), *Anderson Localization*, Y. Nagaoka et al. Ed., Springer-Verlag.
- Khan, A., and K. Mosegaard (2002), An inquiry into the lunar interior : A non-linear inversion of the apollo lunar seismic data, *J. Geophys. Res.*, *107*, 5036.
- Kittel, C. (1969), *Thermal Physics*, Wiley.
- Kovach, R. L., J. S. Watkins, and P. Talwani (1973), Lunar seismic profiling experiment, *Apollo 17 Preliminary Science Report [NASA SP-330]*, p. 10.1.
- Kubo, R. (1966), The fluctuation-dissipation theorem, *Rep. Prog. Phys.*, *29*, 255–284.
- Lacombe, C. (2001), Propagation des ondes élastiques dans la lithosphère hétérogène : modélisations et applications, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble-1.

- Lacombe, C., M. Campillo, A. Paul, and L. Margerin (2003), Separation of intrinsic absorption and scattering attenuation from Lg coda decay in central France, *Geophys. J. Int.*, *154*, 417–425.
- Langseth, M. G., S. J. Keihm, and J. L. Chute (1973), Heat flow experiment, *Apollo 17 Preliminary Science Report*, [NASA SP-330], p. 9.1.
- Larose, E., A. Derode, M. Campillo, and M. Fink (2004a), Imaging from one-bit correlations of wideband diffuse wave fields, *J. Appl. Phys.*, *95*, 8393–8399.
- Larose, E., L. Margerin, B. A. van Tiggelen, and M. Campillo (2004b), Weak localisation of seismic waves, *Phys. Rev. Lett.*, *93*, 48 501.
- Latham, G., M. Ewing, J. Dorman, Y. Nakamura, F. Press, N. Toksoz, G. Sutton, F. Duennebie, and D. Lammlein (1973), Lunar structure and dynamics - results from the apollo passive seismic experiment, *Moon*, *7*, 396–420.
- Liu, Y., R.-S. Wu, and C. F. Ying (2000), Scattering of elastic waves by an elastic or viscoelastic cylinder, *Geophys. J. Int.*, *142*, 439–460.
- Lobkis, O. I., and R. L. Weaver (2001), On the emergence of the Green functions in the correlations of a diffuse field, *J. Acoust. Soc. Am.*, *110*, 3011–3017.
- Lognonné, P., J. Gagnepain-Beyneix, and H. Chenet (2003), A new seismic model of the moon : Implications for structure, thermal evolution and formation of the moon, *Earth Planet. Sci. Lett.*, *211*, 27.
- Lognonné, P., et al. (2000), The netlander very broad band seismometer, *Planet. Space Sci.*, *48*, 1289–1302.
- Maeda, T., H. Sato, and T. Nishimura (2004), Modeling of conversion scattering between rayleigh and body waves in a randomly inhomogeneous half space based on the born approximation, in *Proceedings of the Workshop on 'Probing Earth Media Having Small-Scale Heterogeneities'*, Sendai.
- Malcolm, A. E., J. A. Scales, and B. A. van Tiggelen (2004), Extracting the Green function from diffuse, equipartitioned waves, *Phys. Rev. E*, *70*, 15 601.
- Margerin, L. (1998), Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble-1.
- Margerin, L. (2005), *Introduction to radiative transfer of seismic waves*, in "Seismic data analysis with global and local arrays", A. Levander and G. Nolet ed., AGU Monograph Series.
- Margerin, L., and G. Nolet (2003), Multiple scattering of high-frequency seismic waves in the deep earth : PKP precursor analysis and inversion for mantle granularity, *J. Geophys. Res.*, *108*, 2514.

- Margerin, L., M. Campillo, and B. A. van Tiggelen (1998), Radiativ tranfer and diffusion of waves in a layered medium : a new insight into coda Q, *Geophys. J. Int.*, *134*, 596–612.
- Margerin, L., M. Campillo, N. Shapiro, and B. A. van Tiggelen (1999), Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q : application to seismograms recorded in mexico, *Geophys. J. Int.*, *138*, 343–352.
- Margerin, L., M. Campillo, and B. A. van Tiggelen (2000), Monte Carlo simulation of multiple scatterring of elastic waves, *J. Geophys. Res.*, *105*, 7873–7892.
- Margerin, L., M. Campillo, and B. A. van Tiggelen (2001), Coherent backscattering of acoustic waves in the near field, *Geophys. J. Int.*, *145*, 593–603.
- Montaldo, G., P. Roux, A. Derode, C. Negreira, and M. Fink (2002), Ultrasonic shock wave generator using 1-bit time-reversal in a dispersive medium : application to lithotripsy, *Appl. Phys. Lett.*, *80*, 897.
- Nakamura, Y., G. Latham, and J. Dorman (1982), Apollo lunar seismic experiment-final summary, in *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf. 13th*.
- Page, J., I. Jones, H. Schriemer, M. Cowan, P. Sheng, and D. Weitz (1999), Diffusive transport of acoustic waves in strongly scattering media, *Physica B*.
- Pao, Y.-H., and C.-C. Mow (1995), *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentration*, Crane Russak.
- Paul, A., M. Campillo, L. Margerin, E. Larose, and A. Derode (2005), Empirical synthesis of Green functions from the correlation of coda waves, *in press in J. Geophys. Res.*
- Poupinet, G., W. L. Ellsworth, and J. Frechet (1984), Monitoring velocity variations in the crust using earthquake doublets : an application to the calaveras fault, california, *J. Geophys. Res.*, *89*, 5719.
- Rhie, J., and B. Romanowicz (2004), Excitation of earth’s continuous free oscillations by atmosphere-ocean-seafloor coupling, *Nature*, *431*, 552–556.
- Rickett, J., and J. Claerbout (2000), Calculation of the Sun’s impulse response by multi-dimensional spectral factorization, *Solar Physics*, *192*, 203–210.
- Roberts, P. M., W. S. Phillips, and M. Fehler (1992), Development of the active doublet method for measuring small velocity and attenuation changes in solids, *J. Acoust. Soc. Am.*, *91*, 3291.
- Roux, P., and M. Fink (2003), Green’s function estimation using secondary sources in a shallow water environment, *J. Acoust. Soc. Am.*, *113*, 1406–1411.
- Roux, P., W. Kuperman, and the NPAL Group (2004), Extracting coherent wavefronts from acoustic ambient noise in the ocean, *J. Acoust. Soc. Am.*, *116*, 1995–2003.

- Roux, P., K. G. Sabra, W. A. Kuperman, and A. Roux (2005), Ambient noise cross correlation in free space : Theoretical approach, *J. Acoust. Soc. Am.*, *117*, 79–84.
- Royer, D. (1995), *Génération et détection optiques d'ondes élastiques*, 415.1–415.15 pp., Technique de l'ingénieur-E4.
- Royer, D., and E. Dieulesaint (1986), Optical detection of sub-angstrom transient mechanical displacements, *IEEE Ultrasonics Symp. Proc.*, p. 527.
- Rytov, S. M., Y. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii (1987), *Principles of Statistical Radiophysics I : Elements of random process theory*, Springer-Verlag.
- Rytov, S. M., Y. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii (1989), *Principles of Statistical Radiophysics III : Elements of Random Fields*, p 115, Springer-Verlag.
- Ryzhik, L., G. Papanicolaou, and J. B. Keller (1996), Transport equation for elastic and other waves in random media, *Wave Motion*, *24*, 327–370.
- Sabra, K. G., P. Roux, P. Gerstoft, W. A. Kuperman, and M. C. Fehler (2005a), Surface wave tomography from microseisms in southern california, *Geophys. Res. Lett.*, ?, submitted.
- Sabra, K. G., P. Roux, and W. A. Kuperman (2005b), Arrival-time structure of the time-averaged ambient noise cross-correlation function in an oceanic waveguide, *J. Acoust. Soc. Am.*, *117*, 164–174.
- Sato, H., and M. Fehler (1998), *Seismic Wave Propagation and Scattering in the Heterogeneous Earth*, Springer-Verlag.
- Scheffold, F., and G. Maret (1998), Universal conductance fluctuations of light, *Phys. Rev. Lett.*, *81*, 5800.
- Scruby, C., and L. Drain (1990), *Laser ultrasonics - Techniques and Application*, Adam Hilger.
- Shapiro, B. (1986), Large intensity fluctuations for wave propagation in random media, *Phys. Rev. Lett.*, *57*, 2168.
- Shapiro, N. M., and M. Campillo (2004), Emergence of broadband rayleigh waves from correlations of the ambient seismic noise, *Geophys. Res. Lett.*, *31*, L7 614.
- Shapiro, N. M., M. Campillo, L. Margerin, S. K. Singh, V. Kostoglodov, and J. Pachero (2000), The energy partitionning and the diffuse character of the seismic coda, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *90*, 655.
- Shapiro, N. M., M. Campillo, L. Stehly, and M. H. Ritzwoller (2005), High resolution surface wave tomography from ambient seismic noise, *Science*, *307*, 1615–1618.

- Sharvin, D., and Y. Sharvin (1981), Magnetic-flux quantization in a cylindrical film of a normal metal, *JETP Lett.*, *34*, 272.
- Sheng, P. (1995), *Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena*, Academic Press.
- Snieder, R. (2004), Extracting the Green's function from the correlation of coda waves : A derivation based on stationary phase, *Phys. Rev. E*, *69*, 46 610.
- Snieder, R., A. Grêt, H. Douma, and J. Scales (2002), Coda wave interferometry for estimating nonlinear behavior in seismic velocity, *Science*, *295*, 2253.
- Tanter, M. (1999), Application du retournement temporel à l'hyperthermie ultrasonore du cerveau, Ph.D. thesis, Université D. Diderot, Paris-7.
- Toksöz, M., A. Dainty, S. Solomon, and K. Anderson (1974), Structure of the moon, *Rev. Geophys. Space Phys.*, *12*, 539.
- Tourin, A. (1999), Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores, Ph.D. thesis, Université D. Diderot, Paris-7.
- Tourin, A., A. Derode, P. Roux, , B. A. van Tiggelen, and M. Fink (1997), Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves, *Phys. Rev. Lett.*, *79*, 3637.
- Tourin, A., A. Derode, and M. Fink (2000), Multiple scattering of sound, *Waves in Random Media*, *10*, R31.
- Trégourès, N. P., and B. A. van Tiggelen (2002a), Quasi two-dimensional transfert of elastic waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, *112*, 2296.
- Trégourès, N. P., and B. A. van Tiggelen (2002b), Generalized diffusion equation for multiply scattered elastic waves, *Waves Rand. Med.*, *12*, 21–38.
- Trégourès, N. P., and B. A. van Tiggelen (2002c), Quasi-two-dimensional transfer of elastic waves, *Phys. Rev. E*, *66*, 36 601.
- Trégourès, N. (2001), Approche mésoscopique des ondes en milieu complexe : des micro-ondes aux ondes sismiques, Ph.D. thesis, Université J. Fourier, Grenoble-1.
- Tsang, L., and A. Ishimaru (1984), Backscattering enhancement of random discrete scatterers, *J. Opt. Soc. Am.*, *A1*, 836.
- Turner, J. (1998), Scattering and diffusion of seismic waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, *88*, 276–283.
- Umbach, C. P., C. V. Haesendonck, R. B. Laibowitz, S. Washburn, and R. A. Webb (1986), Direct observation of ensemble averaging of the Aharonov-Bohm effect in normal-metal loops, *Phys. Rev. Lett.*, *56*, 386.

- Van Albada, M. P., and A. Lagendijk (1985), Observation of weak localization of light in a random medium, *Phys. Rev. Lett.*, *55*, 2692.
- van Rossum, M. C. W., and T. M. Nieuwenhuizen (1999), Multiple scattering of classical waves : microscopy, mesoscopy, and diffusion, *Rev. Mod. Phys.*, *71*, 313.
- van Tiggelen, B. A. (2003), Green function retrieval and time reversal in a disordered world, *Phys. Rev. Lett.*, *91*, 243 904.
- van Tiggelen, B. A., and R. Maynard (1998), *Wave Propagation in Complex Media*, G. Papanicolaou Ed., Springer.
- van Tiggelen, B. A., L. Margerin, and M. Campillo (2001), Coherent backscattering of elastic waves, specefic role of source, polarization and near field, *J. Acoust. Soc. Am.*, *110*, 1291.
- Wapenaar, K. (2004), Retrieving the elastodynamic Green’s function of an arbitrary inhomogeneous medium by cross correlation, *Phys. Rev. Lett.*, *93*, 254 301.
- Weaver, R. L. (1982), On diffuse waves in solid media, *J. Acoust. Soc. Am.*, *71*, 1608–1609.
- Weaver, R. L. (1990), Diffusivity of ultrasound in polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, *38*, 55–86.
- Weaver, R. L., and O. Lobkis (2002), On the emergence of the Green’s function in the correlations of a diffuse field : pulse echo using thermal phonons, *Ultrasonics*, *40*, 435–439.
- Weaver, R. L., and O. I. Lobkis (2000), Enhanced backscattering and modal echo of reverberant elastic waves, *Phys. Rev. Lett.*, *84*, 4942.
- Weaver, R. L., and O. I. Lobkis (2001), Ultrasonics without a source : Thermal fluctuation correlations at mhz frequencies, *Phys. Rev. Lett.*, *87*, 134 301.
- Weaver, R. L., and O. I. Lobkis (2004), Diffuse fields in open systems and the emergence of the Green’s function, *J. Acoust. Soc. Am.*, *116*, 2731–2734.
- Weaver, R. L., and O. I. Lobkis (2005), Fluctuations in diffuse field-field correlations and the emergence of the Green’s function in open systems, *J. Acoust. Soc. Am.*, *117*, 3432–3439.
- Wegler, U., and B.-G. Lühr (2001), Scattering behaviour at merapi volcano (java) revealed from an active seismic experiment, *Geophys. J. Int.*, *145*, 579–592.
- White, R. M. (1958), Elastic wave scattering at a cylindrical discontinuity in a solid, *J. Acoust. Soc. Am.*, *30*, 771–785.

- Wolf, P.-E., and G. Maret (1985), Weak localization on a coherent backscattering of photons in disordered media, *Phys. Rev. Lett.*, *55*, 2696.
- Wu, F., J.-L. Thomas, and M. Fink (1992), Time reversal of ultrasonic fields- part II : Experimental results, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr.*, *39*, 579–592.